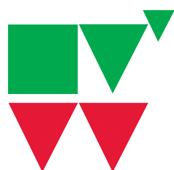
EUCLIDES

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR



NR.7



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

JAARGANG 89 | JUNI 2014

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 89 NR 7

IN DIT NUMMER



ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

KORT VOORAF

Met dit zevende nummer van *Euclides* in de brievenbus sluiten we de jaargang af. Ook u bent waarschijnlijk bezig met afsluiten: de laatste lessen, opruimen, rapportvergaderingen en wat dies meer zij. Ook afscheid nemen hoort bij afsluiten. Onze redactie nam afscheid van Dick Klingens. Vanaf 2000 tot 2013 is hij onvermoeid onze eindredacteur geweest. Hij heeft in die periode vier hoofdredacteurs ondersteund en is medeverantwoordelijk voor vele mooie specials die de afgelopen jaren naast de reguliere *Euclides* zijn uitgebracht. Dit jaar was hij gelukkig nog bereid om de redactie te ondersteunen met zijn ervaring en expertise, maar nu gaan we het zonder hem doen. In dit nummer vindt u een artikel van zijn hand over een onderwerp waar we veel reacties op binnenkregen. Namelijk de 'Oude Doos'-bijdrage van Ton Lecluse nummer 34. Dick krijgt in deze kwestie het laatste woord, en niet alleen omdat we het hem gunnen, maar vooral omdat hij hier weer laat zien hoe mooi en eenvoudig meetkunde kan zijn. Graag ook aandacht voor het laatste deel van de ontdekkingstocht van Stephan Berendonk en Leon van den Broek en het laatste deel van de serie van Martin Kindt. We hopen dat beide artikelreeksen u motiveren om eens met een andere bril naar uw lessen te kijken; en dat u eventueel wat stapjes wilt nemen buiten het curriculum om, want ook daar is het mooi. Mocht u dan nog wat laatste lessen over hebben die niet gevuld zijn, ga dan vooral vouwen met de leerlingen. Miranda Tap maakt u enthousiast en heeft kant-en-klaar materiaal op onze website gezet. En als echt alle afsluitende activiteiten achter de rug zijn, laat u dan verleiden door Lonneke Boels, die nog wat geschikte spelletjes voor de komende vakantiedagen bespreekt. Wij nemen afscheid tot september en ik wens u namens de hele redactie een fijne zomer!

Marjanne de Nijs
Hoofdredacteur

ONTDEKKINGSTOCHT 4

Stephan Berendonk
Leon van den Broek †

Brussels sprouts, veelvlakken en aardkluiten, dat waren de onderwerpen van de eerste drie ontdekkingstochten. Van elk onderwerp werd het didactische potentieel besproken. Misschien is zo'n geïsoleerde behandeling per onderwerp al de moeite waard. In deze vierde aflevering laten de auteurs echter zien, dat de onderwerpen bij elkaar horen en dat hun geheel veel meer is dan de som van hun delen.

Het hoofdlemma

Hoe vaak moet ik een 4 x 6 reep chocola minimaal breken voordat ik 24 losse stukken heb? Zie figuur 1. Zal ik eerst de lengte in of eerst de breedte in moeten breken? Door het gewoon uit te proberen, zag ik dat het niet uitmaakt. Sterker nog: *Alle* manieren om de reep in losse stukken te breken, leverden hetzelfde aantal brekingen op! Het waren er steeds 23. Het was een echte verrassing voor mij toen ik besefte: de rechthoekige vorm van de reep, de evenwijdig lopende gleuven, dat doet er allemaal niet toe. Van belang is alleen het feit dat de chocoladereep een *gebied* en dus *enkelvoudig-samenhangend* (om eens een geleerd woord te gebruiken) is. Bij elke breking splitst dus een tot dan toe samenhangend stuk in tweeën. Het aantal *componenten* stijgt dus bij elke breking met precies 1. Om van een component, de hele ongebroken reep, 24 componenten, de losse stukken, te maken, moeten we dus 23 keer breken. Algemener moeten we bij een reep met *n* stukken *n* – 1 keer breken. In een formule:

(Choco1)... *aantal brekingen = stukken* – 1

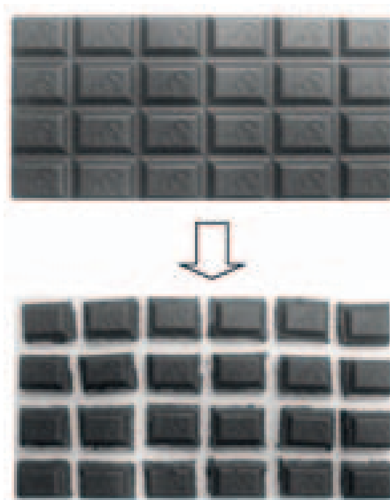
Nu draaien we de zaak om: Gegeven zijn 24 losse punten in het vlak. Twee punten uitkiezen en door een lijn verbinden, dat noemen we een *zet*. Hoeveel zetten moet je minimaal doen, om via een pad uit getrokken lijnen vanuit elk punt naar elk ander punt te komen? Het antwoord is natuurlijk weer 23. We noemen deze vraag het *inverse (of duale) chocoladeprobleem*, omdat het aantal componenten bij elke (niet overbodige) zet met 1 daalt. In het algemeen krijgen we de volgende formule:

(Choco2)... *aantal zetten = punten* – 1

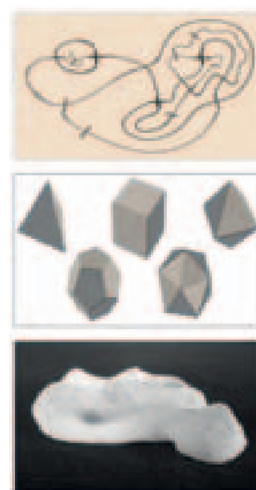
Von Staudt in drie verschillende jassen

De formules (Choco1) en (Choco2) hebben dezelfde vorm. In de voorafgaande afleveringen van deze artikelenreeks zijn we nog meer formules van deze vorm tegengekomen. We voeren ze hier nog eens gezamenlijk op; zie ook figuur 2.

Brussels sprouts (ondekkingstocht 1):
(Conway1)... *aantal splitsende zetten = gebieden* – 1
(Conway2)... *aantal verbindende zetten = plustekens* – 1



figuur 1 Hoe vaak moet je breken om louter losse stukken te krijgen?



figuur 2 Drie contexten, die een gemeenschappelijke structuur vertonen

Veelvlakken (ontdekkingstocht 2):
(Staudt1)... *aantal vouwribben = vlakken* – 1
(Staudt2)... *aantal plakribben = hoekpunten* – 1

Aardkluiten (ontdekkingstocht 3):
(Maxwell1)... *aantal situatie-1-passen = toppen* – 1
(Maxwell2)... *aantal situatie-2-passen = dalen*

De gelijkvormigheid van de formules wijst op een sterke analogie tussen de drie behandelde contexten. Inderdaad is niet alleen de vorm van de formules hetzelfde, maar ook hun inhoud. De formules (Conway1), (Staudt1) en (Maxwell1) hebben we met behulp van een en hetzelfde argument bewezen, het argument dat we ook voor de formule (Choco1) gebruikten. De formules gelden dus bij wijze van spreken op grond van het chocoladeprobleem. Net zo zijn de formules (Conway2), (Staudt2), (Maxwell2) en (Choco2) een gevolg van het inverse chocoladeprobleem.

Poincaré-ische wiskunde

We kunnen de analogie nog explicieter maken, door de vouwribben en situatie-1-passen als splitsende zetten en de plakribben en situatie-2-passen op een bepaalde

manier als verbindende zetten op te vatten. Hiervoor moeten we een proces definiëren dat evenals *Brussels sprouts* uit discrete stappen bestaat. In het geval van de aardkluiten is dat makkelijk. We hoeven alleen het al bestaande proces, de zondvloed, te discretiseren. Bij de veelvlakken interpreteren we de onderscheiding tussen de vouwribben en de plakribben als het resultaat van een stapsgewijze kleuringsprocedure. Voor de precieze definitie van dit kleuringsproces verwijzen we naar het concrete lesmateriaal behorende bij dit artikel, *vakbladeuclides.nl/897berendonk*. Het materiaal is ontwikkeld in samenwerking met de Nijmeegse ASL-groep (Actief Samenwerkend Leraarschap).
Door het kleuringsproces en de discrete zondvloed zijn we in staat om de ribben en passen als zetten te zien. Bovendien krijgen hierdoor ook de begrippen *gebied* en *component*, die we alleen bij het spel *Brussels sprouts* leerden kennen, een zinvolle betekenis in de andere twee contexten (veelvlakken en aardkluiten). De opbrengst van onze vier ontdekkingstochten is nu duidelijk.
We zijn op een elementair en toch krachtig voorbeeld van *Poincaré-ische wiskunde* gestoten. Poincaré[3] 'definieert' wiskunde immers als volgt:

'Ik weet niet, of ik al op een andere plaats heb vermeld, dat wiskunde de kunst is, ogenschijnlijk verschillende dingen dezelfde naam te geven. Alleen moeten deze dingen, ook al zijn ze qua inhoud verschillend, wat hun uiterlijk betreft op elkaar lijken, en ze moeten om zo te zeggen in dezelfde vorm kunnen worden gegoten, ze als het ware in dezelfde vorm kunnen gieten. Als de manier van zeggen goed is gekozen, dan zal je met verbazing constateren, hoe alle bewijsvoeringen, die voor een bekend object worden gemaakt, meteen op vele nieuwe objecten toegepast kunnen worden; je hoeft niets te veranderen, niet eens de woorden, omdat de benamingen hetzelfde zijn geworden.'

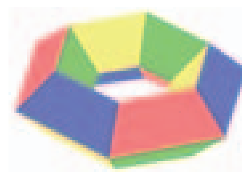
Profiteren van de verschillen

We hebben von Staudts bewijs in drie verschillende contexten gevonden. Opmerkelijk is dat we bij het ontdekken van dat bewijs telkens juist van de *eigenheden* van de contexten wezenlijk gebruik hebben gemaakt. Bij *Brussels sprouts* was het de kwantificering van de vermindering van het aantal mogelijke zetten, bij de veelvlakken waren het de bouwplaten en bij de aardkluiten was het de zondvloed, die ons het onderscheid tussen de twee soorten zetten, ribben respectievelijk passen, aanried. Het waren dus drie totaal verschillende *context-specifieke* situaties, die de cruciale stap van het bewijs motiveerden. Contexten en de daarmee verbondene associaties spelen een belangrijke rol bij het ontdekken, ook al zal het ontdekte later onafhankelijk van de context blijken te zijn.
Heb je eenmaal een structurele brug tussen twee verschillende contexten gevonden, dan kun je de eigenheden van de contexten ook bewust gebruiken om tot nieuwe



figuur 3 Aardkluit met tunnel

inzichten te komen. We geven een voorbeeld. Wanneer je de scholieren, zoals in het lesmateriaal voorgesteld, aardkluiten uit zoutdeeg laat maken, dan zal er wel altijd een scholier bij zijn, althans dat is onze ervaring, die vraagt of de aardkluit ook een *tunnel* mag hebben; zie figuur 3. De tunnel is blijkbaar een begrip, dat zich in de context van aardkluiten opdringt. Laat je daarentegen de scholieren veelvlakken uit *Polydron* bouwen, dan zal je je meestal met enkelvoudig-samenhangende of zelfs convexe resultaten tevreden moeten geven. Slechts zelden komt iemand met een torus-achtig veelvlak aanzetten; zie figuur 4. In de context van veelvlakken is de tunnel een *verborgen* begrip. Hij ligt in ieder geval niet voor de hand. De tunnel is dus een voorbeeld van een begrip dat in eerste instantie slechts in een van de contexten voorkomt. De bestaande analogie tussen de contexten kennende, is het dan echter heel natuurlijk om naar een analogon van een aardkluit met tunnel te vragen. Ben je eenmaal daarnaar op zoek, is deze snel gevonden.



figuur 4 Veelvlak met tunnel

Het belang van bruggen tussen contexten
We laten nu twee verdienstelijke moderne wiskundigen over het wezen van de wiskunde spreken. Eerst Sir Michael Atiyah (zie [1]) in het Engels, daarna Egbert Brieskorn (zie [2]) in het Duits:

'*The main theme of my lecture has been to illustrate the unity of mathematics by discussing a few examples that range from Number Theory through Algebra, Geometry, Topology and Analysis. This interaction is, in my view, not simply an occasional interesting accident, but rather it is the essence of mathematics. Finding analogies between different phenomena and developing techniques to exploit these analogies is the basic mathematical approach to the physical world.*'

'*Ein weiteres wichtiges Moment der Vereinheitlichung ist die immer neue Entdeckung zwischen ganz verschiedenen Gebieten. Fast immer bedeutet eine solche Entdeckung ein tieferes Verstehen und den Beginn einer neuen, fruchtbaren Entwicklung.*'

Het zoeken naar analogieën, naar gemeenschappelijke structuur tussen verschillende contexten, het toepassen van argumenten in een vreemde situatie en het overhevelen van begrippen in een andere context, dat zijn handelingen, die bij de ontwikkeling van de wiskunde een essentiële rol spelen, maar in de schoolwiskunde echter nauwelijks aandacht krijgen. Met de voorgestelde lessenserie over de veelvlakkenstelling willen we een bijdrage leveren deze *onbalans* te verhelpen.

Noten

[1] Atiyah, M. (1978). The Unity of Mathematics, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 10, 69-76.

[2] Brieskorn, E. (1874). Über die Dialektik in der Mathematik, in Otte, M., *Mathematiker über Mathematik*, Springer-Verlag, Berlin, 221–286.

[3] Poincaré, H. (1914). *Wissenschaft und Methode*, B.G. Teubner.

Over de auteurs

Stephan Berendonk is didactisch medewerker aan het mathematisch instituut van de Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn. Leon van den Broek was leraar wiskunde op rsg Pantarijn te Wageningen en auteur van diverse wiskundelesmaterialen.
E-mailadres van Stephan: *berendon@math.uni-bonn.de*

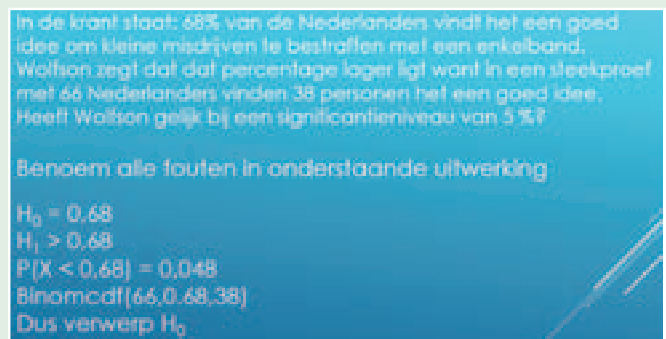
KLEINTJE DIDACTIEK

QUIZ TIME

In 6 vwo bij wiskunde A zijn er twee onderwerpen waar leerlingen veel moeite mee hebben; hypothese toetsen (hoofdstuk 15 in *Getal en Ruimte*) en algebra (hoofdstuk 14 in *Getal en Ruimte*). Daarnaast had ik leerlingen die de rekentoets gaan herkansen, en die hadden extra ondersteuning nodig. Dus heb ik enkele PowerPointpresentaties gemaakt met daarin opgaven uit de rekentoets (of het rekenexamen van het mbo) en opgaven over de genoemde onderwerpen. De afspraken die ik met de klas maakte, waren:

- allemaal pen en papier voor je neus;
- wie het antwoord weet, steekt zijn vinger op maar zegt niets. Zodra er vier vingers zijn, mag de leerling die het eerste was, het antwoord zeggen. Als dit niet juist is, zegt nummer twee het antwoord, enzovoort;
- degene die het juiste antwoord geeft, krijgt een sticker (of een kerstkransje, pepernoot, paaseitje, snoeptomaatje, ...).

De eerste keer had ik maar twee opgaven en was mijn klas boos: dat ik er niet meer had!
Om te zorgen dat in de laatste les voor de vakantie iedereen een sticker of chocolaatje kon winnen, zat er in de quiz één uitwerking van een opgave waarin ten minste acht (notatie)fouten waren gemaakt, zie figuur 1. Iedere leerling mocht één fout benoemen. Verrassende uitkomsten: de fout P(X < 0,68) werd niet ontdekt; ongeveer de helft van de klas had liever een sticker dan een kerstkransje en de leerlingen die nooit een sticker krijgen voor hun huiswerk hadden vaak als eerste het antwoord op deze quizvragen. Maar dat laatste kan natuurlijk toeval zijn... De quizzen staan op de website, zie *vakbladeuclides.nl/897boels1*. De bonusopgaven komen uit oude Kangoeroeopgaven (te vinden via *www.W4kangoeroe.nl*).



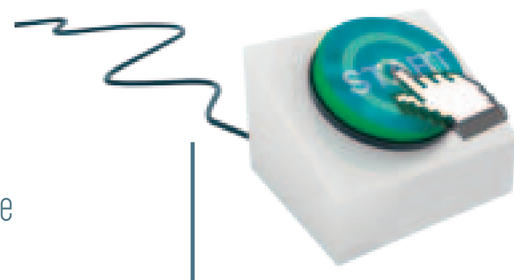
figuur 1 Benoem alle fouten in de uitwerking. Het zijn er meer dan acht, waarvan een deel notatiefouten (zie ook een eerder kleintje didactiek over notatie).

Lonneke Boels

EEN GOED BEGIN. . .

EXAMENKLAS

Erika Bakker



Erika Bakker heeft vorig schooljaar haar LIO-stage wiskunde gedaan, als onderdeel van haar Educatieve Master. Nu is ze begonnen met haar eerste echte baan als docent. In deze rubriek deelt zij haar belevenissen met u

Zo aan het eind van het jaar is het de hoogste tijd om iets over mijn 5 havo-klas te vertellen. Op dit moment zitten we tussen de laatste lessen en de examens in. Ik vind het een spannende periode.

Bij ons op school krijgen de leerlingen in 5 havo drie keer een grote toets die twee uur duurt. De eerste gaat over boek 1, de tweede over boek 2 en de derde over boek 3. Per periode mogen de leerlingen één toets herkansen en om de een of andere reden koos steeds bijna de helft van mijn leerlingen voor wiskunde. Gelukkig was deze voorkeur voor wiskunde ook bij de andere examenklassen zichtbaar; het lag niet aan mij. De eerste twee herkansingen werden door veel leerlingen gelukkig beter gemaakt dan de 'gewone' toetsen, maar de laatste herkansing werd door helemaal niemand beter gemaakt. Dat was wel erg frustrerend. Eigenlijk was het werk van de leerlingen en van mij voor niets geweest. Zeker zo vlak voor de examens had ik toch wel iets anders verwacht.

In de vierde klas moesten de leerlingen al een praktische opdracht doen. Er is een in mijn ogen oneerlijk verband te zien tussen de cijfers die de leerlingen op die praktische opdracht hebben gehaald en de cijfers waarmee diezelfde leerlingen nu het examen ingaan. De praktische opdracht haalt bij leerlingen die er nu heel goed voorstaan, het gemiddelde omlaag, en bij leerlingen die er niet zo goed voorstaan, juist omhoog. Vooral het eerste effect vind ik niet zo eerlijk; misschien iets om eens in de sectie te bespreken.

De laatste paar lessen waren facultatief. Het is interessant om te zien welke leerlingen er dan nog komen en welke redenen ze hebben om wel of juist niet te komen. Een deel had al aangegeven om helemaal niet meer te komen, maar er was ook een leerling die vertelde dat ze niet kon komen omdat ze moest werken. Dat lijkt me niet handig gepland... Eén leerling kwam alle facultatieve lessen, niet omdat ze er heel slecht voor staat, maar om lekker rustig aan examenopgaven te werken. Heel af en toe had ze een klein vraagje, maar met een korte aanwijzing van mij ging ze weer verder. Ook de allerlaatste les was ze er, maar omdat er verder niemand meer kwam en ze de uitgedeelde oefenexamens ook al gemaakt had, is ze toch maar naar huis gegaan.

Omdat dit de eerste keer is dat ik een examenklas les geef, maak ik ook weer kennis met nieuwe dingen. Gedurende het schooljaar ben ik gewend geraakt aan de lange toetsen en herkansingen en het surveilleren in de gymzaal. Ik kreeg mailtjes over *duopooling*, maartmededelingen en WOLF. En nu, vlak voor de examens, komen er weer allerlei nieuwe dingen bij. Bij de administratie moest ik de cijfers van mijn leerlingen controleren en mijn handtekening in een bepaald vakje zetten. Dat voelt wel heel erg officieel en belangrijk.

Behalve alle officiële en administratieve zaken zijn er ook andere bijzondere activiteiten die horen bij de examenklassen. Bij ons op school was er op de laatste schooldag een gala voor alle examenleerlingen. Docenten waren ook welkom. Net zoals mijn eerste brugklasfeest als docent, vond ik dit ook weer enorm spannend, maar het was echt hartstikke leuk. Toen ik met een groepje docenten aan de zijkant van de dansvloer naar onze examenleerlingen stond te kijken, zei een van mijn collega's dat dit een voorproefje was van de diploma-uitreiking. Ook dan trekken de leerlingen allemaal mooie kleren aan. Ik hoop echt dat dit zo is. Misschien niet in hun allermooiste kleren, maar wat zou het geweldig zijn als ze er alle 22 bij zijn.

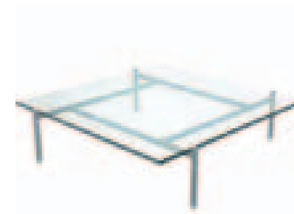
Over de auteur

Erika Bakker rondde in de zomer van 2013 haar Educatieve Master wiskunde af. Na een jaar stagelopen is ze dit schooljaar voor het eerst officieel docent wiskunde. E-mailadres: *erikabakker66@gmail.com*

DE ABC-FORMULE EN DE SALONTAFEL

Martin Kindt

Hoe los je een tweedegraadsvergelijking op? Via ontbinden in factoren? Aanvullen tot een kwadraat? Met de *p,q*-formule of het *abc*-kanon? En zijn er nog andere mogelijkheden? Willen we dat leerlingen echt begrijpen wat ze doen? Of mag het trucmatige routine zijn? Dit is het laatste artikel van een drieluik over het thema 'uitvinden en oefenen'.



Een redactiesom

De som van de leeftijden van de kinderen uit een klas is 150 jaar. Komen er vier leerlingen bij van 8 jaar, dan stijgt de gemiddelde leeftijd van de kinderen in die klas met 1 maand. Hoeveel kinderen zaten er in die klas?

Ga er maar eens aan staan, als je niet aan algebra denkt! Ik weet dat de totale leeftijd stijgt met 32, maar hoe koppel ik die aan die 1 maand of $\frac{1}{12}$ jaar? Gezond verstand inzetten dan maar en wat proberen. Als de gemiddelde leeftijd stijgt door de toevoeging van vier achtjarigen moet het oorspronkelijke gemiddelde lager dan acht zijn geweest, een klas van zeven-plussers, denk ik dan. Sowieso geen plofklas met die leeftijdensom van 150, hoogstens 21 leerlingen. Ik gok eerst maar eens twintig, het gemiddelde zou dan zeven zijn. Door die vier achtjarigen groeit dit met één maand, dat geeft dan:

$$7\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=7\frac{7}{12}=\frac{91}{12}$$

Dit is mooi, want vier leerlingen bij die twintig brengt het totaal op 24 en $\frac{150+31}{24}=\frac{182}{24}=\frac{91}{12}$. Opgelost.

Maar is dit wel wiskunde? Moet je niet uitzoeken of er misschien nog andere oplossingen zijn? En die 150 was wel erg mooi; ik kan ook een opgave construeren waarbij het proberen een stuk lastiger wordt. Voor dit type redactiesommen is ooit de algebra uitgevonden. Zo van stel het gevraagde aantal x, bouw een vergelijking en los die vervolgens op. In dit geval:

$$\frac{150}{x}+\frac{1}{12}=\frac{182}{x+4}\cdot$$

Die breuken wil ik niet, dus maal $12x(x + 4)$, links en rechts. Het kan ook minder drastisch, in drie stapjes bijvoorbeeld, maar het resultaat zal uiteindelijk zijn:

$$x^2 - 380x + 7200 = 0.$$

Hoe verder? Ik zie de ontbinding $(x - 20)(x - 360)$, maar hoe eerlijk is dat na het eerdere raden van die twintig? Zonder die ontbinding lukt het mij ook wel: ik breng die 7200 naar de andere kant en vul dan het linkerlid aan tot een kwadratische vorm.

$$x^2 - 380x + 190^2 = -7200 + 36100$$

met als prettig vervolg:

$$(x - 190)^2 = 170^2.$$

Zo is de klus op een haartje na geklaard. En $x = 360$ is, gelet op de context, duidelijk niet relevant.

Deze opgave was één van de 'ingeklede vraagstukken die aanleiding geven tot een vierkantsvergelijking met één onbekende' uit een vooroorlogs algebraboek (De Groot en De Jong, 1928). De paragraaf bevatte liefst 89 ingeklede opgaven; over oefenen gesproken...

Ingekleed uit

De ontwikkeling van het wiskundeonderwijs aan onze middelbare scholen heeft geleid tot een verminderde belangstelling voor het 'ingeklede vraagstuk'.

Het is 1948 en aan het woord is de Delftse hoogleraar O. Bottema, vermaard om zijn glasheldere colleges en zijn talloze artikelen ('verscheidenheden') in *Euclides*. Hij betreurt deze door hem gesignaleerde ontwikkeling en hij zegt dat het oplossen van een ingeklede vergelijking een geesteswerkzaamheid en een veelzijdigheid vraagt onvergelijkbaar met wat voor het oplossen van een gegeven vergelijking nodig is. Een jaar later ging ik naar de HBS en ik herinner me dat er in het algebraboek kleine paragrafen met ingeklede vergelijkingen stonden die desgewenst konden worden (en ook wel werden) overgeslagen. Nu hadden die vraagstukken ook vaak iets heel kunstmatigs. Bottema merkt op 'dat men een glimlach niet kan onderdrukken wanneer men ze vergelijkt met de werkelijkheid waarvan zij door hun redactie een afspiegeling pretenderen te zijn'. Bij eerstegraadsvergelijkingen lukt het enigszins om niet al te gekke verhaaltjes te verzinnen, maar bij vergelijkingen van de tweede of hogere graad, wordt dat al gauw lastig. Een voorbeeld van een geforceerd aandoende inkleding van een tweedegraadsvergelijking[1] is: 'Het kwadraat van het met 3 verminderde vijfde deel van een troep apen was verborgen in een grot; 1 aap die in een boom was geklommen, was zichtbaar. Hoeveel apen waren er in totaal?'

Stel x = het totale aantal apen. Er komt dan:

$$(\frac{1}{5}x-3)^2+1=x\,.$$

Uitwerken en oplossen geeft $x = 5$ of $x = 50$. Die 50 is prima, maar de vraag is of je die 5 ook goed kan keuren, want het met 3 verminderde vijfde deel is dan –2. Bhãskara (1114-1185), Indiaas wiskundige die dit vraagstuk opschreef, vond van niet. Hij kende al wel negatieve getallen, maar verwierp deze oplossing. Zou ik het hebben

aangedurfd om deze hilarische opgave aan een klas te presenteren? In het licht van de Indiaas-historische context ja, anders nee. Van Bhāskara weer naar Bottema die een lans brak voor het terughalen van ingeklede vraagstukken. Want 'overal waar wiskunde wordt toegepast, hebben wij met ingeklede vraagstukken te maken; het probleem der toegepaste wiskunde heeft zijn oervorm in de simpele rekenvraagstukken die met stelkunde' – ja jongens en meisjes, zo werd algebra vroeger bij ons genoemd en je begrijpt nu misschien wel waarom – 'moeten worden opgelost'.

De *p,q*-formule

Het hoofdstuk *Vierkantsvergelijkingen* in het boek van De Groot en De Jong begint op een manier die men ook in de huidige methoden wel aantreft; de auteurs waren hun tijd vooruit! Op millimeterpapier is de grafiek getekend van $y = x^2 + 2x - 4$ en vanuit de figuur worden de nulpunten geschat. Die zijn echter irrationaal en om ze exact te bepalen wordt een kwadraat afgesplitst: $x^2 + 2x - 4 = x^2 + 2x + 1 - 5$. Zo komen dan de exacte oplossingen te voorschijn: $x = -1 \pm \sqrt{5}$. Direct hierna wordt de methode gegeneraliseerd door de vergelijking $x^2 + px + q = 0$ op te lossen en dit leidt tot de '*p,q*-formule'

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,.$$

Dan komt een grote paragraaf met blote vergelijkingen, waarvan een aantal met parameters. Verder veel vergelijkingen met gebroken vormen, die dan eerst in de standaardvorm van de vierkantsvergelijking moeten worden gebracht. Daarna de al genoemde 89 ingeklede opgaven. Zo ging dat toen.

De natuurlijke context

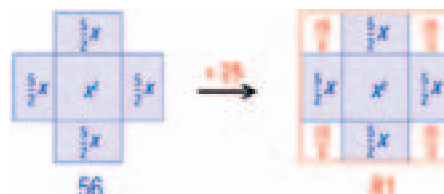
Als leraar ging ik mij destijds steeds meer interesseren voor de geschiedenis van de wiskunde en het gebruik daarvan in het onderwijs. Zo las ik hoe Al Khwarizmi langs meetkundige weg zijn algoritme voor het oplossen van vierkantsvergelijkingen had gevonden. Het leek mij een goed idee om daarmee de behandeling van de vierkantsvergelijking te starten. Dat ging ongeveer zo. Als je van een vierkant de oppervlakte weet, dan ken je de zijde, een kwestie van worteltrekken. Bij een rechthoek is dat minder eenvoudig: de oppervlakte legt niet de zijden vast. Zo kan een rechthoek van 56 cm^2 meer of minder gelijkzijdig zijn: 7 bij 8 cm, 4 bij 14, $3\frac{1}{2}$ bij 16, 2 bij 28, enzovoort. Om de afmetingen te kunnen bepalen, moet je dus meer weten van de zijden. Bijvoorbeeld dat de lengte 10 cm meer is dan de breedte.
Vertaald in algebra: $x(x + 10) = 56$. Of in een plaatje:



Een aanpak in de geest van Al Khwarizmi is om de rechthoek van x bij 10 te vierendelen en de vier stukjes die je krijgt vast te plakken aan de randen van het vierkant met zijde x. Er ontstaat dan een kruis, zo eentje waar je een doosje van kunt vouwen. Dat kruis past in een groter vierkant waarvan de zijde gelijk is aan $x + 5$. De oppervlakte van het vierkant is

$$56 + 4 \cdot (2\tfrac{1}{2})^2 = 81,$$

en de zijde $x + 5$ is dus 9, kortom $x = 4$.



Ik stuurde toen echter aan op de in tweede instantie door Al Khwarizmi bedachte methode waarbij de rechthoek van x bij 6 niet in vieren maar in tweeën wordt verdeeld. Die stukken vormen met het vierkant van x bij x een winkelhaak met oppervlakte 56. Uitbreiding tot vierkant (oppervlakte weer 81) leidt tot de oplossing.



Natuurlijk kun je de oplossing van $x(x + 10) = 56$ ook vinden met *trial and error*. Ik ben er zelfs voor om zo te beginnen. Maar het is duidelijk wat Al Khwarizmi's aanpak voor heeft op de probeermethode, het werkt ook als de uitkomst een vervelende breuk of een irrationaal getal is. Neem bijvoorbeeld de oppervlakte 60 in plaats van 56. De oppervlakte van winkelhaak plus aanvullend vierkant is dan 85 in plaats van 81 en de zijde is dus $\sqrt{85}$ met als gevolg $x = \sqrt{85} - 5$.
Mijn leerlingen van 3 vwo begrepen in zeer korte tijd de aanvulling-tot-vierkant-methode en konden binnen één les een serie opgaven met positieve irrationale wortels oplossen. Aangemoedigd door deze ervaring gebruikte ik deze didactiek ook in havo 3 en ook daar werkte het. Later op het eindexamen waren er leerlingen die in de kantlijn 'Al Khwarizmi-plaatjes' tekenden. Alles goed en wel, zal de lezer denken, maar hoe zit het met negatieve getallen. Natuurlijk, ik was nog lang niet klaar, maar de basis was gelegd. Om negatieve oplossingen en/of negatieve coëfficiënten mee te nemen, moet je een merkwaardig product in stelling brengen. Dat was voor mijn leerlingen van toen geen obstakel, en dat hoeft het nu ook niet te zijn, mits er voldoende (en de nodige!) aandacht is voor de drie merkwaardige producten. Het grappige is dat niet alleen de regels

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

hier effectief zijn, maar ook

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Neem weer $x(x + 10) = 60$ en kijk naar het getal dat juist in het midden ligt tussen x en $x + 10$:

$x+5$

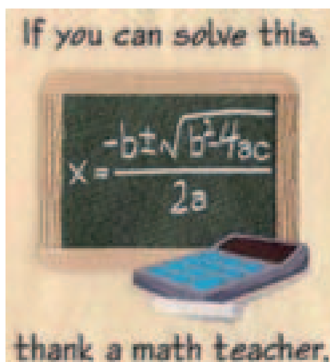
x maal $x+10$

60

$$x(x+10)=60 \longrightarrow (x+5-5)(x+5+5)=60$$
$$(x+5)^2-5^2=60$$
enzovoort

Typisch een staaltje van de 'bordjesmethode'! Je kunt die $x + 5$ natuurlijk ook m noemen (het midden tussen de twee getallen die vermenigvuldigd 60 opleveren). De mooie naam voor deze actie is 'formele substitutie'.

Weg met de *abc*-formule?



'Bij mijn voortgezet onderwijs heb ik dikwijls gewenst dat mijn leerlingen toch maar niet de formule voor de wortels van een vierkantsvergelijking van buiten kenden…'. De uitspraak is van F. Schuh (1875-1966), een destijds zeer bekende hoogleraar. Zij werd gedaan in een voordracht voor de vereniging Wimecos (de voorloper van de NVvW) met als titel *De waarde van het wiskundig redeneren*. Dat was in het jaar 1927. Hij voegde er nog aan toe dat hij het van buiten kennen van de formule schadelijk vond als daardoor de weg vergeten wordt waarlangs het resultaat bereikt wordt, namelijk het afsplitsen van een vierkant. Zo'n 25 jaar later had ik als leerling eigenlijk een hekel aan de *abc*-formule, ik vond die een beetje beneden mijn stand. Een recept dat je niet hoefde te begrijpen om te kunnen hanteren, geen *echte* wiskunde in mijn ogen. Met de kwadraatafsplitsing, waarvan ik de algebraïsche achtergrond goed snapte, kon ik altijd uit de voeten. Feitelijk is het snel opdienen van de *abc*-formule, zoals dat nu vaak zonder enig bewijs (!) in boeken gebeurt, niet alleen verwerpelijk, maar het is ook een gemiste kans. Bij het toepassen oefen je slechts het substitueren van getallen in een formule, terwijl je met de methode van kwadraatafsplitsen veel meer aan het verankeren van algebra-techniek werkt.
Maar als de coëfficiënt van de kwadratische term in de vergelijking nu eens niet 1 is? De Babyloniërs wisten daar wel wat op.[2] Op een van hun kleitabletten komt de volgende opgave voor:

Ik heb 7 keer de zijde van mijn vierkant bij 11 keer zijn oppervlakte geteld en het is $6\frac{1}{4}$. Gevraagd de zijde van mijn vierkant.

Als je dit de eerste keer ziet, frons je de wenkbrauwen. Zijden optellen bij oppervlakten, dat is zondigen tegen dimensies. Men kan of moet dit echter opvatten als een andere algebrataal: *zijde* is hier de onbekende, *vierkant* (oppervlakte) is het kwadraat daarvan. De zo vertaalde opgave luidt:

los x op uit $7x + 11x^2 = 6\frac{1}{4}$.

Hoe werd dit 2500 jaar geleden aangepakt? Wel, vermenigvuldig eerst met 11 en vat vervolgens $11x$ op als de nieuwe onbekende (zeg y). Er komt dan

$$y^2 + 7y = 68\frac{3}{4}.$$

Ik zou dan natuurlijk verder gaan met:

$$y^2+7y+(3\tfrac{1}{2})^2=68\tfrac{3}{4}+12\tfrac{1}{4}=81$$

$$(y+3\tfrac{1}{2})^2=9^2$$

enzovoort.

De Babyloniërs zou je de uitvinders van de formele substitutie kunnen noemen! Ze hanteerden voor de oplossing een recept, gelijkwaardig aan de p,q-formule uit het boek van De Groot en De Jong. Dat boek vormde wel een uitzondering, want in de meeste (zo niet alle overige) schoolboeken voor HBS en gymnasium werd de *abc*-formule behandeld. De p,q-formule, die was goed voor de Mulo ('meer uitgebreid lager onderwijs'). Er was een soort statusverschil tussen beide formules. Ik heb dat nooit begrepen. Waarom is niet de toch wat eenvoudiger te memoriseren p,q-formule gemeengoed geworden? Staat er een factor $\neq 1$ voor de kwadratische term, dan kun je naar keuze delen door of vermenigvuldigen met dat getal. Bij de laatste optie vermijd je mogelijk vervelende breuken en doe je aan formele substitutie. En dat de befaamde discriminant in de p,q-stijl de vorm $p^2 - 4q$ heeft, kan ook geen bezwaar zijn.

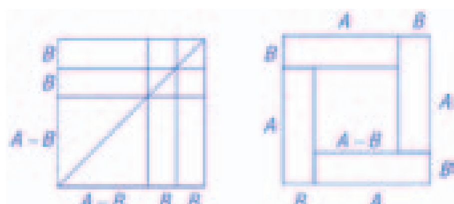
De formule van de salontafel

De figuur toont een salontafel, naar een ontwerp van de Deen Poul Kjaerholm (1929-1980) met daarnaast het bovenaanzicht.

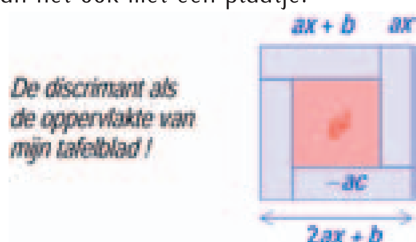


Zo'n tafel – nog te koop in de betere meubelzaak – bezit ik al veertig jaar, maar pas zo'n half jaar geleden zag ik

er een visualisatie in van... jawel, de *abc*-formule! Kijk eerst naar een concreet voorbeeld: $x(x + 10) = 56$. De vier rechthoeken van x bij $x + 10$ sluiten een vierkant in met zijde 10 en passen op hun beurt in het vierkant met zijde $2x + 10$. Dit omhullende vierkant heeft oppervlakte $4 \cdot 56 + 10^2 = 324$, de zijde is 18, dus $x = 4$.
In de *Elementen* van Euclides (boek 2 propositie 8) komt een stelling voor die in algebrataal neerkomt op $(A + B)^2 - (A - B)^2 = 4AB$. De figuur bij Euclides staat hieronder links en het is een beetje puzzelen om de formule te verklaren. Het tafelblad geeft een directer beeld:



Natuurlijk kunnen wij het ook zonder plaatje af en de formule verifiëren via merkwaardige producten. Maar nu de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$. Die schrijf ik eerst als $ax^2 + bx = -c$. En op zijn Babylonisch als:
$(ax)^2 + b \cdot ax = -ac$, ofwel $ax(ax + b) = -ac$. Stel nu $A = ax + b$ en $B = ax$ en pas de propositie van Euclides toe. Er volgt: $(2ax + b)^2 - b^2 = -4ac$, en hier staat al bijna de *abc*-formule. In het geval a en b positief zijn en c negatief, kan het ook met een plaatje:



Uitvinden en (productief) oefenen
De *abc*-formule als aangeleerd recept zonder een spoor van bewijs maakt leerlingen niet beter, integendeel. Zoals de formule nu in een sommige methoden wordt behandeld, geeft een karikaturaal beeld van wiskunde. Essentieel bij wiskunde is immers dat je niets op gezag hoeft aan te nemen. Wiskunde die te moeilijk of te abstract is om redelijk uit te leggen aan of goed te snappen door de leerlingen hoort niet thuis op school. De *abc*-formule (of de *p,q*-variant) kan heel goed uitgelegd en begrepen worden, op allerlei manieren zelfs, maar dat moet wel goed worden voorbereid en als het ware de *finishing touch* zijn van een voldoende lang leerproces. Bij goed onderwijs kan zij door de leerlingen zelf worden uitgevonden, bijvoorbeeld als ze worden uitgedaagd een programma te maken (zeg voor de GR) dat iedere standaard vierkantsvergelijking oplost.
In de meeste schoolboeken wordt bij de tweedegraads-vergelijking eerst de methode met ontbinding in factoren besproken. Professor Schuh noemde (in 1927) het ‘ontbinden op het oog’ een vrij waardeloze activiteit voor het onderwijs, want niet universeel genoeg. Daar ben ik het niet mee eens. De clou zit hem in ‘op het oog’. Laat ik dat buiten beschouwing, dan lukt de oplossing via ontbinding namelijk altijd! Het oplossen van een vierkantsvergelijking is equivalent met het vinden van twee getallen waarvan som en product gegeven zijn. Bij $x^2 - 6x + 7$ bijvoorbeeld lukt ontbinden op het oog niet zomaar. Maar als ik de getallen waarin ik 6 wil splitsen, voorstel door $3 + t$ en $3 - t$ kan ik de t-waarde vinden uit $(3 + t)(3 - t) = 7$ ofwel $t^2 = 2$. Zo vind ik de ontbinding $(x-3+\sqrt{2})(x-3-\sqrt{2})$.
Bij $x^2 - 4x + 7$ lukt het niet met reële getallen omdat dit leidt tot $t^2 = -3$. De factorontbindingsmethode is even universeel als de *abc*-formule. Blijkbaar is er keus te over als het om oplossingsalgoritmen voor de vierkantsvergelijking gaat. Bij het oefenen met vierkantsvergelijkingen zou ik me niet beperken tot het pure oplossen of het berekenen van snijpunten van grafieken. Ingeklede vergelijkingen in een meetkundige (of andere niet al te gekke) context, dat zou eigenlijk ook moeten. En een algebraopgave die wat meer denkactiviteit vraagt, zou kunnen zijn:

Los op $3x^2 - 7x + 2 = 0$ en ook $2x^2 - 7x + 3 = 0$. De wortels van de tweede vergelijking zijn de omgekeerden van die van de eerste. Was dit te voorzien, zonder die vergelijkingen op te lossen? Probeer paren vergelijkingen op te stellen, zodat de wortels van de één de omgekeerden van de wortels van de ander zijn.

Typisch een voorbeeld van een zogeheten productieve oefening. In dit verband verwijs ik naar mijn hoofdstuk *Oefening baart kunst* in Drijvers (2006)[3] of *Principles of Practice* in Drijvers (2011).[4] Tot slot een citaat daaruit: ‘Het effect van oefenen zal voor de meeste leerlingen groter zijn naarmate de opdrachten meer van het denkvermogen en meer eigen inbreng van de leerling vragen en meer mogelijkheden tot reflectie bieden. Kortom naarmate zij een meer productief karakter hebben.’

Noten

[1] Kindt, M., & de Moor, E. (2012). *Wiskunde, dat kun je begrijpen*. Amsterdam: Uitgeverij Bert Bakker.
[2] Van der Roest, A., & Kindt, M. *Babylonische Wiskunde*, Zebrareeks nr. 20.
[3] Drijvers, P. (Red.) (2006). *Wat a is, dat kun je niet weten*. Utrecht: Freudenthal Instituut.
[4] Drijvers, P. (Ed.) (2011). *Secondary Algebra Education*. Rotterdam: Sense Publishers.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding en leerplanontwikkelaar; ook na zijn pensioen is hij nog medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: *m.kindt@uu.nl*

VANUIT DE OUDE DOOS

Ton Lecluse

In deze rubriek bespreekt Ton Lecluse opgaven die de vorige eeuw tot in de Tweede Wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt. Hij beperkt zich tot opgaven die, naar zijn mening, ook door de huidige leerlingen wiskunde op het vwo gemaakt moeten kunnen worden. Eventueel met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Of wellicht geeft de opgave u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!

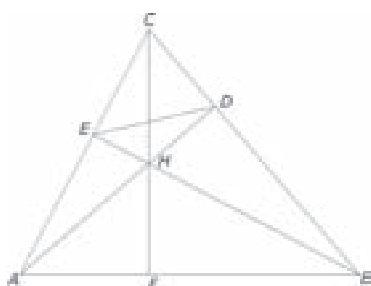


Deze keer een pittige opgave waarin een flink stuk kennis over hoogtelijnen een rol speelt. Wellicht vindt u het leuk om de opgave eerst zelf te proberen. Misschien vindt u de opgave wel te doen voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening. Verderop treft u mijn uitwerkingen aan.

Opgave

Van een scherphoekige driehoek *ABC* zijn *AD, BE* en *CF* de hoogtelijnen; *H* is het hoogtepunt. Bereken de hoeken, als opp. driehoek *EHD* = $\frac{1}{9}$ opp. driehoek *AHB* en *CH* = *HF*.

Een werkschets



Examenkandidaten uit 1932 hebben natuurlijk veel geoefend met eerdere examens, dus ze hebben de benodigde voorkennis (zie ook eerdere artikelen uit deze 'oude doos'-reeks):

- *ABDE* en *CEHD* zijn koordenvierhoeken (1);
- *ED* is antiparallel aan *AB*. Driehoek *DEC* gelijkvormig met driehoek *ABC*;
  $\alpha = \angle BAC = \angle ADC$, $\beta = \angle ABC = \angle DEC$ (2);
- verhouding $k : k^2$ (lengte en oppervlakte) bij vergroting met factor *k* (3);
- de meetkundige plaats van *H* wanneer *C* over de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC* beweegt (bij vaste tophoek *C*) is de gespiegelde van de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC* in *AB* (4).

Wilt u het zelf eerst eens verder proberen?

Combineer de voorkennis, op hoekenjacht

Uit (2) volgt: $\angle EDH = 90° - \alpha$ en $\angle DEH = 90° - \beta$
De hoekensom in driehoek *ABE* geeft $\angle EBA = 90° - \alpha$
De hoekensom in driehoek *ABD* geeft $\angle DAB = 90° - \beta$
Dus zijn driehoek *EHD* en driehoek *ABH* gelijkvormig (*hh*).

Hun oppervlaktefactor is gegeven: $\frac{1}{9}$, dus verhouden overeenkomstige zijden zich als 1 : 3. Dus is $DE = \frac{1}{3}AB$

Ook uit (2) volgt: driehoek *DEC* gelijkvormig aan driehoek *ABC*, dus *CE* : *BC* = *CD* : *AC* = *ED* : *AB* = 1 : 3. Welke hoek van driehoek *ABC* is hiermee bekend?

Voorkennis (4)

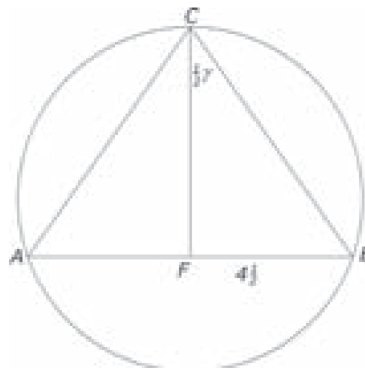
In (bijvoorbeeld) driehoek *CBE*

geldt: $\cos\angle BCE = \frac{CE}{CB} = \frac{1}{3}$, dus

$\angle BCE = 70{,}52877937° = 70°31'44''$.

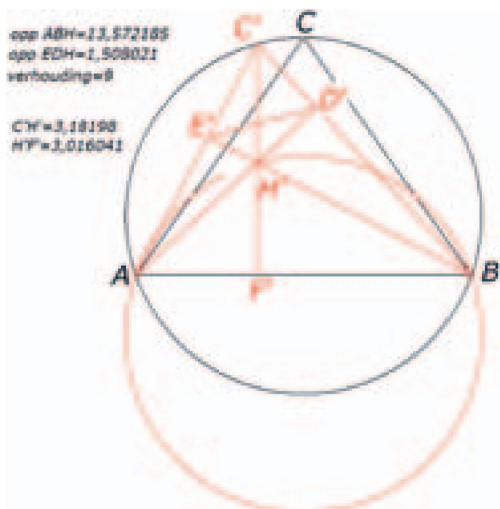
Hoe kunnen we het gegeven *CH* = *HF* gaan inzetten?
Een idee is alle mogelijke driehoeken te beschouwen met *AB* als basis en tophoek $\angle C = 70{,}52877937°$.
We tekenen eerst één driehoek *ABC* met de gegeven tophoek, de gelijkbenige versie, en hebben hier als basis *AB* = 9 gekozen.

Uit $\cos\gamma = \frac{1}{3}$ volgt $\tan\frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (stukje gonio).



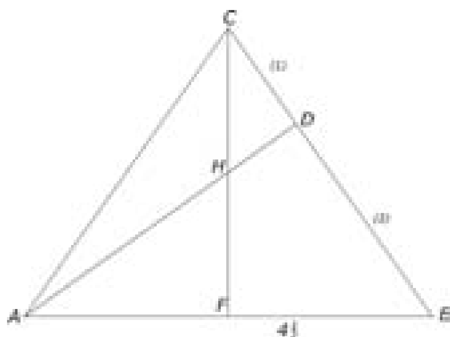
Dus $\tan\frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{FB}{CF} = \frac{4\frac{1}{2}}{CF}$, dus $CF = 4\frac{1}{2}\sqrt{2}$, en bovenstaande tekening kan worden geconstrueerd (bijvoorbeeld met *Geocadabra*).

Breid nu deze tekening uit met een bewegend punt *C′*, teken in driehoek *ABC′* de hoogtelijnen en zet het spoor aan van het hoogtepunt *H′*, een tweede, even grote cirkel.



Ik heb enkele berekeningen mee laten lopen, en constateer verheugd dat de oppervlakteverhouding 1 : 9 blijft kloppen. Ook let ik op de lengtes van *C′H′* en *H′F′*. En wat blijkt? *C′H′* heeft een constante lengte. En dat is eigenlijk eenvoudig in te zien, want de twee cirkels zijn even groot en de onderste ontstaat uit de bovenste door verschuiving over deze afstand. Wanneer *C′* lager ligt dan *C*, is *C′F′* korter dan *CF*, en ook krijgen we het vermoeden tijdens het verplaatsen van *C′*, dat *H′* het midden van *C′F′* is wanneer *C′* samenvalt met *C*.

Dus? 1 + 1 = 2
Dus resteert ons te controleren of in de gelijkbenige driehoek met basis *AB* = 9 en hoogte $CF = 4\frac{1}{2}\sqrt{2}$ het hoogtepunt CF doormidden deelt.



Omdat de driehoek nu gelijkbenig is, zijn nu *CE* en *CD* uit de eerste figuur even lang, dus is ook de verhouding *CD : CB* = 1 : 3.
De stelling van Pythagoras geeft $BC = \frac{9}{2}\sqrt{3}$, zodat $CD = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Driehoek *CDH* en driehoek *CFB* zijn gelijkvormig (*hh*), dus *FC : CD = CB : CH*.
We vullen de bekende lengtes in:

$4\frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{3}{2}\sqrt{3} = 4\frac{1}{2}\sqrt{3} : CH$ waaruit volgt: $CH = \frac{9}{4}\sqrt{2}$.

Inderdaad: de helft van *CF*. Nu zijn de gevraagde hoeken *A* en *B* gemakkelijk te bepalen.

Het laatste stukje hieronder bevat een aardige oefening voor in de vierde klas:
Van een gelijkbenige driehoek *ABC* is de hoogte $CD = AB \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Bewijs dat de hoogtelijnen vanuit de basishoekpunten de hoogtelijn *CF* doormidden delen.

De verhouding waarin *D* de zijde *BC* verdeelt, hoeft niet te worden gebruikt. Door een assenstelsel in te voeren en van *BC* en *AD* een vergelijking op te stellen en hun snijpunt *H* te berekenen kom je er ook. Leerlingen moeten wel weten dat het product van richtingscoëfficiënten –1 is bij loodrechte stand.

Bron

Stoelinga, Dr. Th. G.G., & van Tol, Dr. M.G. (Red.) (1958). *Wiskunde-Opgaven (van de toelating tot de Universiteiten van 1925 tot 1958).* Uitg. Tjeenk Willink, achtste druk.

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort. E-mailadres: *alecluse@casema.nl*

VOUWEN IN DE WISKUNDELES

Miranda Tap

Miranda Tap ontwikkelde een workshop voor derde- en vierdeklassers over het vouwen van een dodecaëder, waarbij ook nog wat grafentheorie langskomt. In dit artikel beschrijft ze deze workshop en als u enthousiast ben om het zelf te gaan proberen: al haar lesmateriaal staat op onze website.

Zelf geloof ik heilig dat leerlingen meer gemotiveerd zijn voor mijn vak als ik ze met enige regelmaat laat zien hoe mooi wiskunde is. Dat kan door ze filmpjes te laten zien over de wiskunde achter jongleren (George Hart via The Simons Foundation), of wiskundig voor ze te goochelen of een *Numberphile*–onderwerp met ze door te nemen (voor wie het niet kent: *www.numberphile.com*). Maar persoonlijk ligt mijn hart bij de kunst. Het is een manier om letterlijk aan leerlingen te laten zien hoe mooi wiskunde is. (Als ik uitweid over de schoonheid van het getal pi word ik toch altijd een beetje meewarig aangekeken door mijn leerlingen, heeft u dat ook?)
Naar aanleiding van de Nationale Wiskundedagen 2011 heb ik een oude hobby herontdekt, namelijk de kunst van het papiervouwen of beter gezegd origami. Met mijn voorliefde voor wiskundige kunst resulteerde dit al gauw in allerlei (wiskundig gevouwen) objecten die in mijn lokaal kwamen te staan. Tot mijn verbazing en genoegen kwam de veelvuldige vraag van leerlingen of ik het ook aan hen wilde leren. Daartegenover werd door sommige andere leerlingen ook het nut van origami ernstig in twijfel getrokken, het is ten slotte maar 'gewoon papier'. Dit leidt altijd tot een uitleg dat origami verre van zinloos is, dat er vele wiskundigen zijn die zich er mee bezighouden (neem bijvoorbeeld Erik Demaine) en dat er behoorlijk wat vouwwerken levensreddend of levensbepalend zijn. Om maar eens enkele voorbeelden te noemen:

- een parachute;
- de airbag van een auto;
- de stent (een heel dun opgevouwen buisje wat ter plekke uitvouwt) die ze tegenwoordig in je aorta kunnen plaatsen via de lies;
- de satelliet die ervoor zorgt dat je ontvangst hebt met je telefoon en die zonder vernuftig vouwplan nooit in een baan om de aarde terecht zou kunnen komen.

De verschillende reacties van leerlingen inspireerden mij tot het uitwerken van de workshop die hieronder beschreven is.

Tijdens de NWD 2011 liet Philippe Cara de wiskunde achter de origami zien en hij liet ons de zogenaamde *Phizz–unit* vouwen, waarmee je heel goed platonische lichamen kunt bouwen,[1] dit alles zonder het gebruik van schaar of lijm. Dit intrigeerde mij, een relatief simpel te



figuur 1 30 Phizz–units in drie verschillende kleuren. Bron: zie [2]

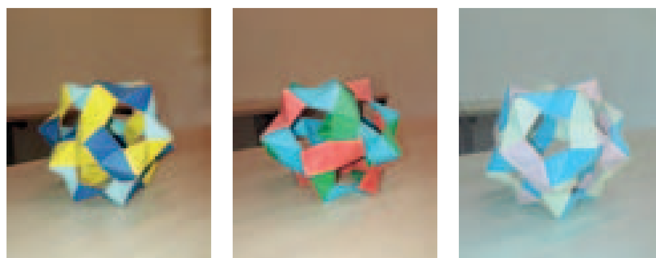
vouwen module waar je leerlingen ruimtelijk mee aan de slag kunt laten gaan. Ze maken er een mooi object mee en ondertussen leren ze wat over wiskunde.
De bedenker van de Phizz–unit, Thomas Hull, heeft hier een heel boek over geschreven, met allerlei projecten waarmee je met een groep wiskundeleerlingen aan de slag kunt.[2] Het is dus ook niet vreemd dat het boek de titel *Project Origami* draagt. Uit dit boek heb ik een project genomen en omgezet naar een activiteit van drie lesuren voor leerlingen in de derde en/of vierde klas. Doel



figuur 2 Het in elkaar vouwen van de Phizz–units tot een dodecaëder. Bron: zie [2]

hierbij was voor mij vooral om leerlingen te laten zien dat wiskunde niet alleen bestaat uit de sommen die we ze laten maken, maar dat het veel meer omvat.

De origamiworkshop bestaat uit het vouwen van 30 modules in drie verschillende kleuren, zie figuur 1. En die vervolgens zodanig in elkaar te schuiven dat er een dodecaëder ontstaat, zie figuur 2. Het idee is om deze modules zodanig in elkaar te vouwen dat niet twee dezelfde kleuren elkaar raken. De benodigde inkleuring kun je voorspellen met behulp van een Hamiltoncircuit. Immers, bij een Hamiltoncircuit doe je alle punten in een graaf precies één keer aan. Je gaat dus naar een punt toe, en er weer uit weg. Omdat een dodecaëder g–regulier is met graad 3, kun je de toekomende weg een kleur geven, de vertrekkende weg een tweede kleur en de weg die overblijft een derde kleur. Zo worden de wegen verdeeld in drie verschillende kleuren, waarbij in elke knoop die drie verschillende kleuren samenkomen. Om deze Hamiltonwandeling te kunnen bepalen, moet je eerst een platte graaf tekenen van de dodecaëder. Dit heb ik als docent laten zien door eerst voor te doen hoe je de platte graaf van een kubus tekent. Als de leerlingen dit eenmaal begrijpen, kunnen ze zelf aan de slag met de platte graaf van de dodecaëder. Vervolgens kun je dan laten zien hoe je een Hamiltonrondwandeling maakt in de platte graaf van de kubus. Dit is ook een mooie gelegenheid om de kennis over grafen op te poetsen.
Vorig jaar mei 2013 was het dan zover: na veel voorbereiding gingen mijn collega's en ik de activiteit uitvoeren in vijf klassen 3 havo, vijf klassen 3 vwo en één groep 4 vwo wiskunde A. Wij hadden de beschikking over drie lesuren van 50 minuten achter elkaar, vanwege een zogenaamde activiteitenweek. De ochtend begon met de 3 havo–groepen. Omdat het de eerste groepen waren, liepen we hier ook tegen het grootste probleem aan: we lieten de leerlingen eerst zelf knoeien met het in elkaar zetten van de dodecaëder zonder Hamiltoncircuit om te laten zien dat dit niet zomaar gaat, maar dit kostte te veel tijd en sommige leerlingen raakten gedemotiveerd. Daar kwam bij dat we met groepjes van drie leerlingen werkten, maar dat tijdens het in elkaar zetten ineens twee leerlingen weinig meer te doen hadden. Dit probleem loste zich vanzelf op toen we ze de platte grafen en het Hamiltoncircuit lieten tekenen. De leerlingen vonden het lastig, maar konden het uiteindelijk vrijwel allemaal zelf oplossen. Hierna waren ze toch weer gemotiveerd om aan de slag te gaan. Uiteindelijk bleven sommigen zelfs langer, omdat ze per se de dodecaëder in elkaar wilden hebben.
De middag met 3 vwo gaf ons een uitstekende gelegenheid om het geleerde in de praktijk te brengen: we hebben het zelf puzzelen eruit gehaald en zijn direct doorgegaan met het Hamiltoncircuit. Dit werkte inderdaad beduidend beter, omdat er zo meer samenhang in zat en iedereen iets te doen had bij het in elkaar zetten. De een gaf aan, de ander hield het kleurenschema in de gaten



figuur 3 Door leerlingen gemaakte dodecaëders

en de derde schoof met hulp van de eerste de modules in elkaar. Ook hier waren leerlingen soms heel gefrustreerd dat het niet meteen lukte, maar de meesten waren uiteindelijk fanatiek bezig om de dodecaëder in elkaar te krijgen. Er ontstond in sommige groepen zelfs een soort competitiedrang om als eerste klaar te zijn. Zie figuur 3 voor wat resultaten van hun inspanningen.

Wat ik wel merkte, is dat ook mijn collega's het een lastige opdracht vonden. Het in elkaar zetten van de dodecaëder is even puzzelen, dus dat moet je echt een keer geoefend hebben. Het is dus belangrijk dat je zelf 30 modules vouwt en tot een dodecaëder maakt voor je er met de klas mee aan de slag gaat, dat scheelt een hoop frustratie voor jezelf en de leerlingen tijdens de workshop.

De reacties van de leerlingen waren in mijn groepen vrij positief. Natuurlijk heb je ook dan leerlingen die uit pure frustratie hun halve dodecaëder in de vuilnisbak mikken, omdat het niet gelukt is. Maar er kwamen ook leerlingen naar me toe die zeiden dat ze er van tevoren echt geen zin in hadden omdat ze dachten dat het heel suf zou zijn, maar dat het uiteindelijk best leuk was. Al met al vond ik het een zeer geslaagde activiteit.[3]

Noten

[1] (red) Phizz staat voor *pentagon–hexagon zig–zag unit* en is bedacht door Thomas Hull. Zie ook: *http://mars.wne.edu/~thull/*

[2] Hull, T. (2006). Project Origami, activities for exploring mathematics. Natick, MA: A K Peters/CRC Press.

[3] Voor het lesmateriaal (hand–out leerlingen, docentenhandleiding en bijlagen), zie *vakbladeuclides.nl/897tap*

Over de auteur

Miranda Tap is docent wiskunde aan SG Spieringshoek te Schiedam. E–mailadres: *m.tap@spieringshoek.nl*

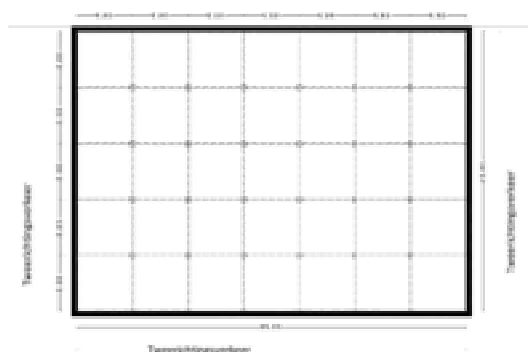
HET FIZIER GERICHT OP…

WISKUNDE IN BEROEPEN

Michiel Doorman
Vincent Jonker
Monica Wijers



In FIzier belichten medewerkers van het Freudenthal Instituut een thema uit hun werk en slaan hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. In deze aflevering bespreken Michiel Doorman, Vincent Jonker en Monica Wijers het project Mascil: lesactiviteiten waarbij de relatie met de beroepspraktijk belangrijk is.



figuur 1 De opdracht 'Maak een efficiënte indeling voor een parkeergarage'.

In het Europese project *Mathematics and Science in Life* (Mascil)[1] worden lesactiviteiten ontwikkeld om leerlingen een beeld te geven van de relatie tussen wiskunde en beroepspraktijken. De centrale vraag voor het project is: kan het onderwijs in wiskunde (en natuurwetenschappen) beter en aantrekkelijker gemaakt worden door een verbinding te maken met de context en werkzaamheden van een beroepsuitoefenaar?

Maak een ontwerp voor een parkeergarage

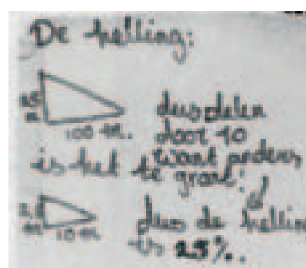
In figuur 1 staat een voorbeeld van een lesactiviteit die een relatie legt tussen wiskunde en de beroepspraktijk van een architect. De leerlingen kruipen in de huid van een team architecten, dat wordt gevraagd om een reeds geplande parkeergarage efficiënt in te delen, rekening houdend met de diverse wensen en eisen. Met een korte video krijgen ze een beeld van hoe dit werk in de praktijk wordt uitgevoerd. Daarna gaan ze in groepen aan het werk. De opdracht kan worden gedaan in twee lesuren. De opdracht bevat wel enkele aanwijzingen voor een aanpak, maar veel is open. Om het proces te begeleiden, werkt de docent met een lesplanning, waarin het voor de leerlingen duidelijk is hoeveel tijd ze krijgen en wat er van hen verwacht wordt. De leerlingen verkennen eerst kort de situatie en formuleren vragen die de opdracht bij hen oproept ('Wat zijn de afmetingen van een gemiddelde auto?', 'Hoe groot is een draaicirkel?', 'Hoe hoog moet de garage zijn?'). Deze vragen worden klassikaal besproken en voor zover mogelijk beantwoord, of leerlingen worden verwezen naar methoden om antwoorden te achterhalen. Hierna gaan alle groepjes aan de slag en maken een ontwerp. De docent heeft tijdens het proces vooral een begeleidende rol. Het is snel duidelijk dat de informatie onvolledig is en dat leerlingen zelf aannames moeten maken. Er is niet slechts één gewenste oplossing en ze moeten hier creatief mee omgaan. De verschillende uitwerkingen worden ten slotte gepresenteerd en met de klas geanalyseerd. Deze opdracht is uitgeprobeerd op O.R.S. Lek en Linge in een 2 havo/vwo-klas en een 2 atheneum/gymnasium-klas. In figuur 2 staan enkele details van de uitwerkingen van deze leerlingen.

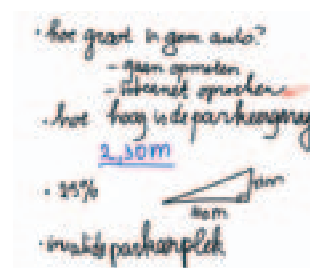
Onderzoekend leren

In opdrachten zoals bovenstaand voorbeeld wordt een beroep gedaan op zowel de leerling als docent om op een relatief nieuwe manier samen aan het werk te gaan. Deze werkwijze wordt ook wel aangeduid met 'onderzoekend leren'.[2] Kenmerken van onderzoekend leren zijn onder andere: samenwerken aan een open betekenisvol probleem met meerdere oplossingen; gebruiken van wiskunde in een echte situatie; reflecteren op het proces en de oplossing. In deze opdracht is ook de relatie met de beroepswereld een belangrijk aspect. Dit is als volgt vormgegeven:



figuur 2 Details van de uitwerking van de opdracht 'Maak een efficiënte indeling voor een parkeergarage'.





- de **context** is het ontwerpen van een parkeergarage, dit is werk van een architect;
- de leerlingen krijgen de **rol** van de architect (of een team van een architectenbureau);
- de **handelingen** (de activiteiten van de leerlingen) zijn deels vergelijkbaar met beroepshandelingen van de architect. Dit is bijvoorbeeld zo bij het werken op schaal, het rekening houden met een relatief groot aantal variabelen dat van invloed is op de definitieve indeling, het uitvoeren van berekeningen voor de helling en het maken van een ontwerpschets;
- er is een duidelijk **product** gedefinieerd voor een, weliswaar denkbeeldige, opdrachtgever: er moet een gedetailleerd ontwerp met toelichting worden opgeleverd.

Materiaal

In het Mascil-project gaan we samen met docenten (wiskunde, maar ook de andere bètavakken) na welke opdrachten geschikt zijn voor deze werkwijze en of er in de gebruikte lesmethoden aanknopingspunten te vinden zijn voor het ontwerpen van dergelijke opdrachten. Soms kan een opdracht uit een schoolboek met kleine wijzigingen geschikt gemaakt worden voor een meer onderzoekende benadering. Voor dit herontwerpen van bestaande opdrachten ontwikkelen we, samen met docenten, een handreiking met aanwijzingen en tips. Daarnaast gaan we in pilots na of deze opdrachten voor leerlingen ook daadwerkelijk meer aanknopingspunten bieden om te begrijpen waar en hoe de kennis en vaardigheden uit wiskunde- en bètavakken in verschillende beroepen ingezet worden. Inmiddels is een kleine verzameling van materialen aangelegd[3] en wordt gewerkt aan nascholingsmateriaal ter ondersteuning van docenten bij het verder vormgeven en ontwikkelen van onderzoekend leren vanuit beroepscontexten in de bètavakken. Vanaf het schooljaar 2014-2015 komt het materiaal op grotere schaal beschikbaar en zal nascholing worden aangeboden. Ook komt het nascholingsmateriaal online beschikbaar.[4] Bent u nu al geïnteresseerd? Neem dan contact op met een van de auteurs.

Noten en verwijzingen

[1] Zie *www.mascil-project.eu*
[2] Opdracht op internet: *www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28187/*
[3] Zie *www.fisme.science.uu.nl/publicaties/subsets/mascil_nl*
[4] Onder andere via *www.freudenthal.nl*

Doorman, M., van der Kooij, H., & Mooldijk, A. (2012). Denkactiviteiten, onderzoekend leren en de rol van de docent. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 31*(4), 9-12. Zie *www.fisme.science.uu.nl/wiskrant/artikelen/314/314juni_doorman-vanderkooij-mooldijk.pdf*
Van der Linden, J., De Vet, L., Schepers, L., & Verhage, H. (1992). *Wiskunde en werk. Lesmateriaal vanuit de beroepspraktijk*. Utrecht: Werkgroep Vrouwen en Wiskunde. Zie *www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/1992_ww_00_wiskunde-en-werk.pdf*

Over de auteurs

Michiel Doorman, Vincent Jonker en Monica Wijers zijn werkzaam bij het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht en zijn alle drie betrokken bij het Europese project Mascil. E-mailadressen: *m.doorman@uu.nl*, *v.jonker@uu.nl*, *m.wijers@uu.nl*



MEDEDELING



NATIONALE WISKUNDE DAGEN

Op vrijdag 30 en zaterdag 31 januari 2015 worden de 21e Nationale Wiskunde Dagen gehouden in Congrescentrum de Leeuwenhorst te Noordwijkerhout. Als wiskundeleraar moet je van tijd tot tijd nieuwe ideeën op kunnen doen en creatief en actief met je vak bezig zijn. Dat kan door te luisteren naar een goed verhaal, door actief mee te doen in werkgroepen en door met collega's van gedachten te wisselen. De NWD biedt die gelegenheid en is bedoeld voor alle wiskundeleraren die les geven aan leerlingen van 12 tot 18 jaar van ieder schooltype.
Kosten per persoon: € 395,00 bij overnachting op een tweepersoonskamer en € 430,00 bij overnachting op een eenpersoonskamer. In de week van 8 september wordt de programmafolder naar de scholen gestuurd. De inschrijving gaat open op 24 september. Meer informatie over de NWD kunt u altijd vinden op *www.fisme.science.uu.nl/nwd*.

Inlichtingen:

Saskia Klaasing, telefoon 030 2539818; e-mailadres: *nwd@fi.uu.nl*

VANUIT DE OUDE DOOS 34, MAAR DAN KORTER

Dick Klingens

Op de opgave van Ton Lecluse in *Euclides* nummer 7 jaargang 88 is volop gereageerd. We plaatsten al eerder een reactie van Agnes Verweij en André van den Berg. Nu sluiten we het onderwerp af met een hele korte oplossing van Dick Klingens.

In driehoek *ABC* is *BE* het raaklijnstuk uit *B* aan de ingeschreven cirkel van driehoek *ABC*, zie figuur 1. Dan is (zoals bekend?), met *s* als *halve omtrek* van die driehoek:
$BE = s - b$
De lengte van *BE* is in driehoek *BDE* uit te drukken in *b*:

$$\tan\angle B = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{DE}{BE} = \frac{\frac{1}{6}b}{BE}\text{, zodat } BE = \tfrac{1}{6}b\sqrt{3}.$$

Met andere woorden, $s - b = \frac{1}{6}b\sqrt{3}$.
Daaruit volgt voor de halve omtrek *s* van driehoek *ABC*:
(1)... $s = \frac{1}{6}b(6+\sqrt{3})$
We kunnen daarmee nu (al) de oppervlakte *O* van driehoek *ABC* (exact) berekenen als we *b* kennen, immers:

$$O = r\cdot s = \tfrac{1}{6}b\cdot\tfrac{1}{6}b(6+\sqrt{3}) = \tfrac{1}{36}b^2(6+\sqrt{3})$$

- is $b = 4$, dan is $O = \frac{4}{9}(6+\sqrt{3})$;
- is $b = 6$, dan is $O = 6+\sqrt{3}$.

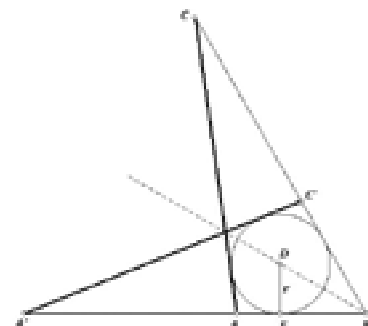
Voor de berekening van de *hoeken* (α en γ) van de driehoek kunnen we gemakshalve – zonder daarmee de algemene geldigheid van de berekening aan te tasten (*gelijkvormigheid van driehoeken*) – de lengte *b* van de zijde *AC* gelijk aan 6 kiezen.

Volgens relatie (1) is in dit geval
$2s = a + b + c = 12 + 2\sqrt{3}$, zodat:
(2)... $\mathbf{a + c} = 2s - b = (12 + 2\sqrt{3}) - 6 = \mathbf{6 + 2\sqrt{3}}$
Verder blijkt uit de *cosinusregel* in driehoek *ABC*,
$b^2 = 36 = a^2 + c^2 - 2ac\cos 60°$, dat:
$36 = a^2 + c^2 - ac$
zodat:
$36 + 3ac = a^2 + c^2 + 2ac = (a + c)^2$
Gebruikmakend van (2) vinden we dan:
$3ac = (6 + 2\sqrt{3})^2 - 36 = 12 + 24\sqrt{3}$
En na deling door 3 is:
(3)... $\mathbf{ac = 4 + 8\sqrt{3}}$
Uit de relaties (2) en (3) volgt nu dat $x_1 = a$ en $x_2 = c$ de wortels zijn van de vierkantsvergelijking:

(4)... $x^2 - (6 + 2\sqrt{3})x + (4 + 8\sqrt{3}) = 0$
De (benaderde) waarden van de wortels van (4) zijn:
$\{a;c\} = \{6{,}861816;2{,}602286\}$



figuur 1



figuur 2

Met de *cosinusregel* in driehoek *ABC* voor de zijde *a*:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{36+c^2-a^2}{12c}$$

vinden we hiermee *twee* oplossingen (gespiegeld in de bissectrice van hoek *B*) voor de hoeken α en γ van de driehoek, zie figuur 2:
(5)... α = 97°56'17" met γ = 22°3'43"
(5')... α = 22°3'43" met γ = 97°56'17"

Over de auteur

Dick Klingens is redacteur van *Euclides* (tot augustus 2013 was hij eindredacteur). Hij was tot aan zijn pensioen in 2010 als wiskundeleraar en schoolleider verbonden aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel, en daarnaast gedurende een aantal jaren ook opleider van leraren voor het technisch beroepsonderwijs. Van 2007 tot eind 2012 was hij lid van de cTWO-ontwikkelgroep meetkunde voor wiskunde B vwo.
E-mailadres: *dklingens@pandd.nl*

GETUIGEN

JACOB DE GELDER

Danny Beckers

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs. In de serie Getuigen behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.

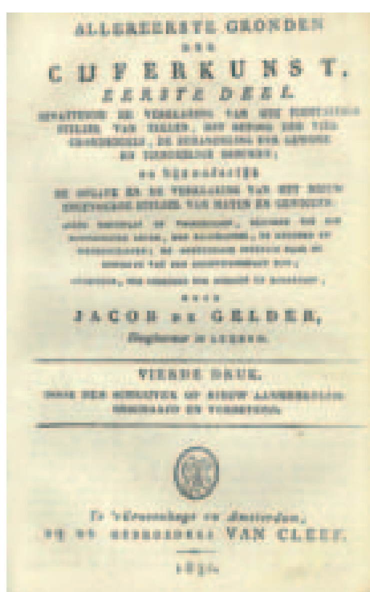


In de loop der eeuwen zijn er talloze reken- en wiskundeboeken verschenen waar gepassioneerd (of minder geïnspireerd) les uit werd gegeven. De meeste van die boeken hebben de tand des tijds niet overleefd, maar van veel publicaties staat ergens nog wel een exemplaar te verstoffen op een boekenplank in een openbare of particuliere bibliotheek. Oude lesboeken behoren over het algemeen niet tot de meest enerverende producties die men ter hand kan nemen. Toch valt er veel uit te leren wanneer je meer wilt weten over het reken- en wiskundeonderwijs van vroeger tijden.

Eén van de beste voorbeelden om die bewering te illustreren is het tweedelige *Allereerste Gronden der Cijferkunst* van Jacob de Gelder. Dit rekenboek laat namelijk zeer pregnant een drietal grote veranderingen zien in het Nederlandse wiskundeonderwijs rond 1800. Het boekje was dan ook populair tijdens de regeringsjaren van koning Willem I. In die tijd werd het Nederlandse onderwijsbestel hervormd om beter te voldoen aan de eisen van de tijd. De koning, die de troon in 1814 had aanvaard, moest regeren over een land dat net uit een aantal jaren van revolutie en bezetting kwam, dat economisch in een deplorabele toestand verkeerde, en waar de culturele eenheid ver te zoeken was. Met de toevoeging van België aan zijn land werden die problemen er niet kleiner op. Hij kon echter profiteren van een centraal georganiseerde bureaucratie en ver uitgewerkte plannen voor een nationaal onderwijsbestel – beide erfenissen van de revolutionaire machthebbers vóór hem. Die beide voordelen wist Willem I in te zetten.

De eerste grote verandering betrof het doel van het onderwijs. In de achttiende eeuw was onderwijs altijd een lokale aangelegenheid. Mensen gingen een contract aan met een plaatselijke onderwijzer om hun kind bepaalde vaardigheden aan te leren. Voor sommige kinderen hoorde daar rekenen bij, maar dan wel de specifieke rekenregels om de problemen op te kunnen lossen die voorkwamen in de beroepsgroep waar hij later in terecht zou komen. Dat betekende dat bijvoorbeeld de zoon van de bakker en de zoon van de edelsmid allebei sommetjes zouden leren oplossen over menging (van respectievelijk deeg en metalen), zonder dat daarbij verteld werd dat het in wezen om hetzelfde soort sommetjes ging.



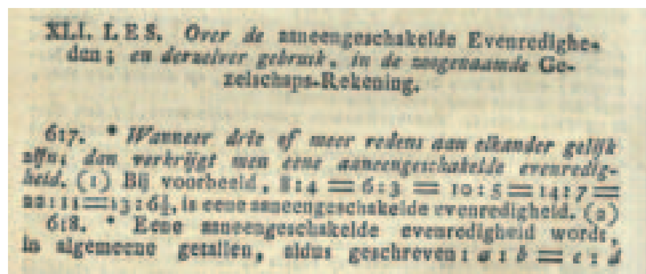


ALLEREERSTE GRONDEN
DER
CIJFERKUNST.
EERSTE DEEL
[illegible]
JACOB DE GELDER,
[illegible]
VIERDE DRUK.
[illegible]
VAN CLEEF.

figuur 1 Jacob de Gelder (1765-1848)

figuur 2 Jacob de Gelder, *Allereerste Gronden der Cijferkunst, eerste deel*, titelblad

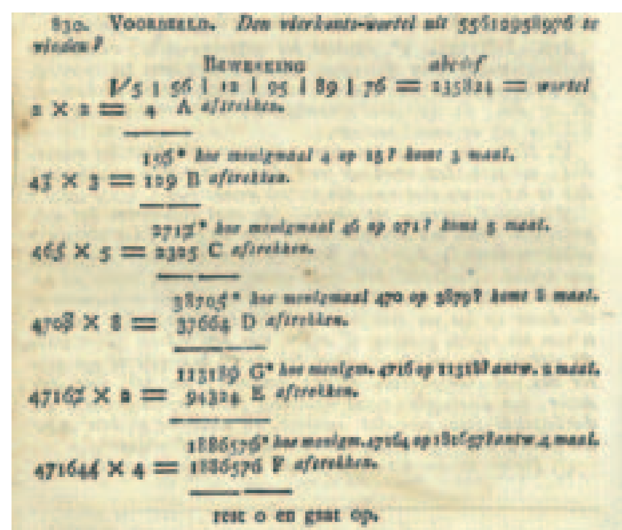
Onder Willem I veranderde dit. De Nederlandse overheid had behoefte aan goed opgeleide burgers die zouden kunnen meewerken in de overheidsadministratie en die als technici zouden kunnen helpen om de industrialisatie in Nederland op gang te brengen. De overheid financierde onderwijs in de hoop daarmee leerlingen op die plek in de samenleving te krijgen, waar ze de natie het beste zouden dienen. Daarmee bevorderde men efficiëntie van het staatsbestel, de culturele eenheid en het gevoel van rechtvaardige indeling van de samenleving (iedereen kreeg immers de kans om onderwijs te volgen). De leerling kon zich dus niet langer beperken tot het leren van de regels die hij voor zijn toekomstige vak nodig had. Hij moest juist zien dat de rekenregels die hij leerde in tal van situaties toegepast konden worden. In welke situatie hij ze later zou gaan gebruiken deed niet ter zake. Wellicht zouden er nieuwe toepassingen ontstaan, en dan moest hij ook kunnen inschatten op welke wijze hij zijn rekenwerk kon toepassen.


XLI. LES. *Over de aaneengeschakelde Evenredigheden; en derzelver gebruik, in de zoogenaamde Gezelschaps-Rekening.*

617. * *Wanneer drie of meer redens aan elkander gelijk zijn; dan verkrijgt men eene aaneengeschakelde evenredigheid.* (1) Bij voorbeeld, 8:4 = 6:3 = 10:5 = 14:7 = 22:11 = 13:6½, is eene aaneengeschakelde evenredigheid. (2)
618. * Eene aaneengeschakelde evenredigheid wordt, in algemeene getallen, aldus geschreven: *a* : *b* = *c* : *d*

figuur 3 Jacob de Gelder, *Allereerste Gronden der Cijferkunst, tweede deel*, pagina 64. Vraagstuk bij de theorie over evenredigheden

Op het titelblad van de *Cijferkunst* kondigde De Gelder al aan dat hij de theorie '*toepast op voorbeelden, genomen uit het dagelijksche leven, den koophandel, de kunsten en wetenschappen*'; de auteur heeft zijn boek dan ook '*opzetelijk ingerigt naar de behoefte van den tegenwoordigen tijd*'. Dat betekende dat hij bijvoorbeeld na de theorie over verhoudingen zowel een opgave plaatste over winkelgoederen, als een opdracht over rente, als een over de hoogte van een toren.
Ook droeg De Gelder zijn steentje bij aan de culturele eenwording van Nederland. Zo passeerden in verschillende opgaven zaken die tot de algemene culturele bagage van de Nederlanders mochten worden gerekend: kennis over ontdekkingsreizen, de oppervlakte van de aarde, het aantal inwoners van Amsterdam. Daarnaast was zijn rekenboek ingericht naar het nieuwe (metrieke) stelsel van maten en gewichten. Koning Willem I had het in 1817 bij wet verklaard tot het enige stelsel van maten en gewichten dat in het koninkrijk gebruikt mocht worden. De Gelder behandelde niet alleen het stelsel, maar verdedigde ook de invoering ervan.
Een tweede grote verandering, passend bij de verschuiving van het doel van het onderwijs, betrof de verschuiving van de onderwijsfinanciering. Was die geheel in lokale handen gedurende de achttiende eeuw, Willem I bekrachtigde in 1815 een onderwijswet die lagere scholen, Latijnse scholen en universiteiten direct onder verantwoordelijkheid bracht van de centrale overheid. Benoemingen, kosten en examinering van docenten werden voortaan centraal geregeld. Het bestaan van het rekenboek van De Gelder alleen al is een uitdrukking van die nieuwe financiering. De overheid maakte het reken- en wiskundeonderwijs verplicht, en verwees voor de omvang van de te behandelen stof naar de lesboeken van De Gelder.
In de *Cijferkunst* is te zien dat het moeite kostte om goede docenten te vinden die ook op het gewenste niveau rekenen en wiskunde konden doceren. Om de beginnende docenten van dienst te zijn, had De Gelder onder elke pagina vragen staan, die tot leidraad dienden voor de docent. Die opdrachten konden docenten inzetten om te controleren of leerlingen alles begrepen hadden.
De derde grote verandering betrof een inhoudelijke verandering van de wiskunde die onderwezen werd. Was het in de achttiende eeuw voldoende om de regels die de leerling later nodig zou hebben in het hoofd te stampen, dat was na 1800 uitgesloten. Minstens moest men de algoritmes op een abstracter niveau kunnen toepassen. De Gelder ging verder dan dat. Hij wilde dat de leerling de logica achter de algoritmes ook begreep. Zo werd het algoritme voor de worteltrekking dat hij uitlegde voorafgegaan door uitleg van het achterliggende rekenwerk: $(a + b + c)^2 = a^2 + (2a + b)b + (2a + 2b + c)c$.
Ook op een dieper niveau streefde De Gelder begrip na. De samenhang tussen de algoritmes en de betekenis van de begrippen was voor hem een essentieel onderdeel van de wiskunde. Die betekenissen waren een zinvolle abstractie van de realiteit. Hij was ervan overtuigd dat de leerling zo ook gemakkelijker zou leren. Zo gaf hij bijvoorbeeld een definitie van het begrip 'getal': de naam van een hoeveelheid eenheden en kwam daar steeds op terug. Door de hoeveelheid van eenheden in de vorm van sterretjes weer te geven en die te groeperen, verklaarde De Gelder de leerling het tientallig stelsel, het overdragen van cijfers bij de bewerkingen, het lenen van een eenheid, enzovoort.


5 | 56 | 12 | 95 | 89 | 76 = 235824 = wortel
2 × 2 = 4 A aftrekken.
rest 0 en gaat op.

figuur 4 Jacob de Gelder, *Allereerste Gronden der Cijferkunst, tweede deel*, pagina's 150-151; voorbeeld van het algoritme van de worteltrekking

Koning Willem I had verschillende motieven om rekenen en wiskunde als verplichte vakken in het curriculum van scholen in zijn koninkrijk op te nemen. Maar hij had vast nooit gedacht dat de effecten van zijn wetgeving zo fraai zouden worden geïllustreerd als door de *Cijferkunst* van De Gelder.

Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs. E-mailadres: *d.j.beckers@vu.nl*

'WISKUNDE, WANNEER HEB IK DAT NOU NODIG?'

Astrid van de Kerkhof

DEEL 2

Vakdocenten hebben meer invloed op de loopbaan van hun leerlingen dan ze denken. Maar wat moet je met loopbaanoriëntatie in je lessen Wiskunde? Hoe doen collega's dat in de praktijk? Het project Stimulering LOB sprak met docenten wiskunde en vroeg hen naar hun tips en ervaringen. Dit is het vervolg van het artikel in het vorige nummer van *Euclides*.

'Het echte leven spreekt kinderen aan. Laat ze een vak zien', vindt Jos Verhoosel, docent wiskunde aan de Lerarenopleiding Fontys in Tilburg, 'dan denken ze "dat is leuk, daar wil ik wat mee doen." Als je tabellen en grafieken behandelt, nodig je iemand uit de praktijk uit in de klas – de bedrijfsleider van de supermarkt om de hoek, een leidinggevende of administrateur uit het bedrijfsleven, ouders van leerlingen – en die vraag je "Wat vind je nou zo leuk aan je beroep?" en "Wat doe jij in jouw beroep nog met tabellen en grafieken?" Zo krijgen leerlingen echt een goed beeld of het iets voor ze is.' 'Een etaleur moet bijvoorbeeld vaak op schaal werken', vult Rob Wieleman aan. Hij is docent wiskunde aan het Rembrandt College in Veenendaal. 'Dan gebruik je heel veel meetkunde. Dat hoef je maar een paar keer per jaar te doen. Als alle docenten dat doen, heb je heel veel voorbeelden.' 'En als dat niet lukt', merkt LOB-projectleider Els van Osch op, 'is er altijd wel een YouTube-filmpje. Of kijk eens op de websites van de landelijke kenniscentra als Calibris (zorg, welzijn en sport) en Kenteq (technisch vakmanschap) en Beroepen in Beeld. Daar vind je veel filmpjes over verschillende beroepen.' 'Of ga met groepjes leerlingen naar het mbo', suggereert Rob, 'en ga eens kijken waar in die opleidingen wiskunde zit.' Jan Schakel, docent wiskunde aan het Develstein College in Zwijndrecht, deed dat al voor de opleidingen elektrotechniek en zorg en welzijn: '"Hoe starten jullie zo'n klas op?" vraag ik dan, "Waar gaan jullie mee beginnen, op welk niveau?" en "Waar ben je mee bezig na een jaar?"' 'Je kan wiskunde op elk niveau gebruiken', benadrukt Heleen van der Ree, voormalig wiskundedocent en nu beleidsmedewerker bij de NVvW, 'niet alleen als bruggenarchitect. Als je weet welke beroepen leerlingen kiezen, weet je ook wat voor wiskunde erin zit.'

> 'IK GEBRUIK FACEBOOK EN TWITTER OM DE EXPONENTIËLE FUNCTIES UIT TE LEGGEN.'

Rol vervolgonderwijs en beroepsvereniging

'De leerstof actueel en concreet maken en dit koppelen aan een beroep, is zowel voor docenten als leerlingen een grote stap', merkt Rob op. 'Niet iedereen kan putten

KUN JE MET
EEN PASSER EN
EEN GEODRIEHOEK
OOK

JE TOEKOMST
UITMETEN?

Lobke

uit die breedte. Als vakdocent wil je ook gewoon dat studenten slagen.' Jos ziet de LOB-rol van de wiskundedocent vooral in het bewust maken van kwaliteiten en perspectieven: 'Je hebt geen eindeloos spectrum van beroepen waar je wat over kan vertellen.' 'Dat kan je van een individuele docent ook niet verwachten', vindt Hermien Miltenburg, relatiemarketeer voor de Wageningen Universiteit en lid van het sectoroverstijgend LOB-decanennetwerk. 'Vraag opleidingen wat zij vinden dat leerlingen nodig hebben. Het hoger onderwijs mag best de opdracht krijgen om naar docenten en leerlingen helder te maken wat nodig is, niet vanuit commerciële belangen en minimale toelatingseisen – wiskunde A, terwijl voor de studie wiskunde B eigenlijk beter is – maar realistisch en transparant. Hier ligt ook een taak voor de beroepsvereniging. Die kan voor populaire beroepen als weerman en forensisch onderzoeker nagaan wat voor wiskundekennis daarvoor nodig is.'

Inhaken op de actualiteit

'Als je op het vmbo lesgeeft, moet je een verhaal kunnen vertellen', stelt Jan. 'Vmbo-leerlingen leven vandaag, nu, bij dit vak en zijn helemaal niet met hun toekomst bezig, ook niet in de bovenbouw. Morgen is totaal anders. Ik moet een ander register opentrekken en doe mijn les vrijwel nooit uit het boek. Voor meetkunde is dat het makkelijkst. Bij de kaderberoepsgerichte leerweg leg ik de verdeling van hoeken en graden bijvoorbeeld uit door leerlingen een nokkenas op tijd te laten zetten. Ik grijp direct naar mijn eigen verhalen en die van anderen. Er is heel veel wat je goed kan gebruiken in je lessen,

Hoe help ik scholieren hun loopbaancompetenties te ontwikkelen in de wiskundeles?

1. breng de kwaliteiten van leerlingen in beeld – of laat ze dat zelf doen:
   - wees je bewust van je rol: scholieren praten het liefst met hun vakdocent over wat ze interessant vinden en waar ze goed in zijn;
   - analyseer (samen) de toetsen: wat voor type fouten maken leerlingen, wat doen ze goed?
   - laat leerlingen zelf onderzoeken en opschrijven wat hen aanspreekt in een beroep en dit met anderen bespreken (kwaliteiten- en motievenreflectie).
2. werk samen met je collega's, binnen de sectie en met collega's van andere vakken:
   - stem af wanneer belangrijke onderdelen in de verschillende vakken worden behandeld. Maak eventueel één toets voor verschillende vakken;
   - deel relevante toepassingsvoorbeelden uit praktijk en actualiteit;
   - gebruik de gecertificeerde NLT-lesmodules.
3. zorg dat je een verhaal hebt bij je wiskundeles:
   - gebruik nieuws en actuele onderwerpen;
   - houd het nu en dichtbij: 'wat ik heb meegemaakt', 'wat vorige week is gebeurd';
   - zoek voorbeelden uit de leefwereld van scholieren: *Facebook*, ijsjesverkopers, 50cc scooters, sportprestaties enzovoort.
4. haal de praktijk de klas in:
   - zoek minstens één beroep waarvoor het onderwerp wat je nu behandelt, relevant is. Nodig beroepsbeoefenaars uit in je les en vraag hen erover te vertellen;
   - laat beroepenfilmpjes zien en bespreek met de leerlingen welke wiskundekennis voor dat beroep nodig is;
   - illustreer de politieke en praktische macht van wiskunde aan de hand van praktijkvoorbeelden uit publicaties als *How to lie with statistics?*
5. vraag vervolgonderwijs, beroepsvereniging en bedrijfsleven om hulp:
   - de beroepsvereniging kan voor populaire beroepen nagaan wat voor wiskundekennis daarvoor nodig is;
   - laat opleidingen duidelijk maken wat zij vinden dat leerlingen werkelijk aan wiskundekennis nodig hebben;
   - vraag het bedrijfsleven om toegankelijke wiskundige toepassingen die je kan gebruiken in je les.

over fouten in verpleegkunde, misleidende statistieken, enzovoort. Haal voordat je een les gaat geven eerst de kernstukken uit het boek en zoek er voorbeelden uit tijdschriften of de krant bij. Die laat je dan tijdens de les op het smartboard zien. Dan blijft het hangen. Je kan met je vaksectie een verzameling van deze voorbeelden aanleggen. Bewaar ze desnoods in een map. Als je de toepasbaarheid niet te ver vooruitschuift en vertelt "wat ik heb meegemaakt" en "wat vorige week is gebeurd" zien leerlingen wel dat wiskunde een interessant bijvak is. Natuurlijk moet je meteen inhaken op ludieke praktijksituaties: Als een leerling twee doosjes eieren bij een vriendje tegen het raam gooit, ga ik meteen met ze rekenen: Die eieren zijn niet zo duur, maar wat heeft een ei in deze situatie werkelijk gekost, met schoonmaak en al erbij? Dat vinden ze leuk en ja, als ze jou mogen, dan heb je ze al voor tachtig procent.'

Wiskunde en economie in één toets?

'Door de samenhang tussen vakken duidelijk te maken, zie je dat wiskunde bij meer vakken terugkomt', adviseert Jan. 'Maar je moet wel de curricula naast elkaar leggen, want lang niet altijd wordt in de wiskundemethode goniometrie behandeld vóórdat je bij natuurkunde bezig bent met licht. Soms loopt het maanden uit elkaar wat ze wanneer leren, en je ziet ook dat schrijfwijzen verschillen en dat assen worden omgedraaid. Eens in de zoveel tijd moet je dat met je collega's bespreken, en hoe je daarmee omgaat. Je kan leerlingen uitleggen waarom we in natuurkunde wel met vier plaatsen achter de komma werken en bij wiskunde niet: omdat we bij wiskunde een techniek leren die in de praktijk bij natuurkunde wordt toegepast. En je kan bijvoorbeeld samen met economie één toets maken over procenten. Daar krijgen leerlingen dan een cijfer wiskunde en een cijfer economie voor.' 'Eerstegraads wiskundedocenten zijn tegenwoordig NLT-bevoegd,' merkt Rob op. 'En NLT heeft veel gecertificeerde lesmodules die je in je lessen kan gebruiken, gratis, met veel praktijkvoorbeelden en proefjes die je zelf kunt doen.'

Waar ben ik eigenlijk goed in?

Een andere manier om leerlingen bewust te maken van hun kwaliteiten en affiniteit met bepaalde beroepen is hen tijdens een mentoruur een LOB-opdracht te geven. Jan: 'Ze kunnen dat ook vanuit huis doen. Dan vraag ik ze bijvoorbeeld beroepenfilmpjes te bekijken en in een mail aan mij op te schrijven welke affiniteit ze met een beroep hebben. Waarom lijkt het je wat, dat beroep? Even bespreken via Skype kan ook. Er met anderen over praten is ook waardevol, met ouders en met medeleerlingen bijvoorbeeld. Leerlingen kun je elkaar ook in de klas laten vertellen wat ze gevonden hebben.' Afsluitend benadrukt Jos: 'Het is belangrijk dat je al je LOB-activiteiten afsluit met een kwaliteiten- en motievenreflectie met de leerling. Als je dat niet doet is het zinloos.'

Over de auteur

Astrid van de Kerkhof is zelfstandig communicatieadviseur voor (landelijke) projecten op het gebied van onderwijs, kinderopvang en onderzoek. Zij werkt in opdracht van de VO-raad voor het project Stimulering LOB: *www.lob-vo.nl*.
E-mailadres: *Astrid@zintcommunicatie.nl*

BREUKEN IN DE WISKUNDELES

Frans Ballering

Getallen dienen in de wiskundeles een belangrijke plaats in te nemen. Breuken ook. En niet alleen in dat ene hoofdstuk over breuken, en ook niet alleen in de rekenles; breuken moeten 'gewoon getallen' worden.

In de brugklas moeten leerlingen rekenen met breuken. In groep 6 (ook bekend als het breukenjaar) maken kinderen voor het eerst kennis met deze getallen. Ze benoemen de breuk als deel van het geheel, ze gebruiken de breuknotatie, ze vullen een breuk aan tot het geheel, plaatsen breuken op een getallenlijn en vergelijken breuken in veel voorkomende concrete situaties. Aan het eind van groep 8 zouden ze verschillende breuken moeten kunnen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Maar veel leerlingen komen niet zo ver, dat weten we al lang.

Ervaring in de brugklas

Na een korte herhaling van de theorie van breuken gaan de leerlingen rekenen. Met de verse uitleg van het gelijknamig maken in het achterhoofd, lijkt het in eerste instantie goed te gaan. Bij het maken van gemengde sommen gaat het echter mis. Bij het vermenigvuldigen worden de breuken eerst gelijknamig gemaakt en vaak worden alleen de tellers met elkaar vermenigvuldigd en de noemers niet. Mijn conclusie uit deze ervaring: op abstract niveau is voor de leerlingen volstrekt onduidelijk waarom de regels voor gelijknamig maken gelden. Hetzelfde geldt voor het vermenigvuldigen van tellers en noemers. We moeten dus terug naar een lager, concreter niveau.

Er was eens...

Hoe lang zou het geleden zijn dat leerlingen breuken op een getallenlijn hebben gezet? Hoe lang zou het geleden zijn dat ze een getal als $2\frac{3}{7}$ zijn tegengekomen?

En wanneer hebben ze voor het laatst nagedacht over het derde deel van $\frac{3}{8}$? Om breuken wat gewoner te maken, pleit ik in mijn artikel over rekenen in de wiskundeles ervoor om in allerlei voorbeelden bij verschillende wiskundeonderwerpen vaker te kiezen voor niet alleen de getallen 2, 3 en 4 maar ook eens voor getallen als hierboven.[1] Ik hoor de lezers denken: 'Maar daarmee breng ik een extra moeilijkheid aan die niet nodig is bij de leerstof waar het over gaat.' En dat is volkomen juist. Daar staat tegenover dat als 'moeilijke' getallen nooit ter sprake komen, behalve in de rekenles, leerlingen er niet vertrouwd mee raken en er te weinig over nadenken.

Voorbeelden

Bij het rekenen met variabelen:

$$2 \times 7 + 4 \times 7 = 6 \times 7$$
$$2 \times 18 + 4 \times 18 = 6 \times 18$$
$$2 \times 328 + 4 \times 328 = 6 \times 328$$
$$2 \times -5 + 4 \times -5 = 6 \times -5$$
$$2 \times \frac{3}{7} + 4 \times \frac{3}{7} = 6 \times \frac{3}{7}$$
$$2 \times -2\frac{3}{8} + 4 \times -2\frac{3}{8} = 6 \times -2\frac{3}{8}$$
$$2 \times 52861 + 4 \times 52861 = 6 \times 52861$$
$$2 \times 4{,}6 + 4 \times 4{,}6 = 6 \times 4{,}6$$
$$\text{Dus: } 2 \times a + 4 \times a = 6 \times a$$

Er wordt niet gerekend in dit geval, maar we laten maar weer eens even zien hoeveel verschillende soorten getallen er zijn. Een breuk is ook een getal! En met getallen rekenen we in de wiskundeles. Maar we gebruiken wel ons verstand. Ik denk dat deze gedachten allemaal zitten in dit ene voorbeeld. Vierkanten en rechthoeken hoeven toch niet altijd gehele getallen als lengte en breedte te hebben?

En bij wortels zou het schatten ervan en dus het denken aan kommagetallen vaak kunnen gebeuren. $\sqrt{7}$ ongeveer 2,3? Even nagaan: $2{,}3 \times 2{,}3 = 4{,}6 + 0{,}69 = 5{,}29$ dus 2,3 is wat weinig. Een activiteit als deze kost natuurlijk wel even lestijd. Maar voor een vwo-leerling is het nuttig om $2{,}5 \times 2{,}5$ uit het hoofd te weten. En dat kan hier dan ook mooi bevorderd worden. En $0{,}3 \times 2{,}3$ kan best via een tiende keer 2,3 en dat kan via $\frac{23}{10}$ en $\frac{230}{100}$, waarmee ook dat kommaschuiven een concrete basis krijgt (concreet is niet altijd met context of materiaal, blijkt maar weer).

Intermezzo

Iedere leraar kan elke week een dergelijke situatie in de klas benutten om te zorgen dat de leerlingen nadenken over getallen. Natuurlijk lukt dat niet altijd, al was het maar door de tijdsdruk en de extra moeilijkheden. Om dat laatste te vermijden, kun je het rekenen ook in een soort intermezzo stoppen. 'Zojuist hadden we het over $2{,}3 \times 2{,}3$. Dat gaan we nu uit het hoofd doen.'

Terug naar vermenigvuldigen

Leerlingen bedenken bij $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ een verhaal over een taart, reep chocolade of een zak knikkers want teller keer teller en noemer keer noemer, dat wil ik even niet horen. Natuurlijk vinden ze dit moeilijk, dus we beginnen eenvoudig en dat hangt sterk af van je klas. Ook voor leerlingen die de regels goed toepassen, zijn dit prima activiteiten, omdat ook zij worden gedwongen om nog eens na te denken. Ik denk dat leerlingen door dit soort activiteiten hun tijd in de rekenlessen veel effectiever zullen gebruiken.

Het optellen van breuken is eenzelfde verhaal. Eerst de taartpunten. Als je even grote stukken hebt, is het eenvoudig: $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$. Maar als ik een taart heb met vijf stukken en een met zeven, wordt het een ander verhaal. Hoe krijgen we even grote stukken?

Elk $\frac{1}{5}$-stuk in zeven stukken verdelen en de leerlingen verzinnen dan wel de rest, met een beetje geluk en sturen van onze kant.
En delen: ik had laatst een flinke blessure opgelopen met een kruiwagen. Natuurlijk veel te vol gedaan en ik moest het karwei klaren door de kruiwagen maar voor de helft (of een derde, of twee derde) vol te maken. Halfvol betekent twee keer zo vaak lopen. En als ik maar een derde erin doe, moet ik drie keer zo vaak. Met een getal als twee derde kan ik hier voorbereiden op het omgekeerde. Met wijnflessen van 0,7 of 0,75 liter wordt dat omgekeerde nog wat duidelijker en kan de stap naar abstract eventueel worden gemaakt.

En vergeet de schuilnamen niet: $\frac{10}{14}$ is een schuilnaam voor $\frac{5}{7}$ en $-\frac{21}{3}$ is net als $\frac{-21}{3}$ een schuilnaam voor -7.

Schuilnamen maken breuken gewoner en dat bevordert de bereidheid om over breuken na te denken.

En ze leefden nog lang en gelukkig...

Zouden ze wat minder schrikken van het getal π als breuken wat vaker ter sprake komen?

Noot

[1] Ballering, F. (2011). Waarom rekenen thuishoort in de wiskundeles en niet in aparte lessen. *Euclides, 86*(5).

Over de auteur

Frans Ballering was werkzaam als wiskundeleraar en lerarenopleider en is sinds 2010 met pensioen.
E-mailadres: *fransballering@hetnet.nl*



MEDEDELING



VAKANTIECURSUS: 'NIEUWE TIJDEN'

Voor leraren exacte vakken aan het havo, vwo of hbo, voor leerlingen en voor andere belangstellenden organiseert het Platform Wiskunde Nederland (PWN) in 2014 een vakantiecursus met als thema: 'Nieuwe Tijden'.

De nieuwe examenprogramma's voor wiskunde worden per 2015 ingevoerd op havo en vwo. Naast deze 'nieuwe tijden' in het onderwijs zijn er ook nieuwe tijden in wiskundig onderzoek, en de vakantiecursus van dit jaar zal daarom ook om dit thema draaien. De focus zal liggen op onderwerpen die ook in de klas gebruikt kunnen worden. *Big Data* van de bonuskaart tot gepersonaliseerde marketing, logica in de rechtspraak, meetkunde in de architectuur, analytische meetkunde in historisch perspectief en priemtweelingen zijn de onderwerpen welke gepresenteerd zullen worden. Ook zal er tijd zijn voor zelfwerkzaamheid; het afgelopen jaar is deze opnieuw geïntroduceerd in de vakantiecursus en werd alom als zeer nuttig en fijn ervaren. Dit jaar draait de zelfwerkzaamheid om het thema *Data Science*, ook wel 'de vierde discipline' genoemd naast theorie, experiment en simulatie.

De cursus wordt gegeven in:
- Eindhoven: op vrijdag 22 en zaterdag 23 augustus aan de TU Eindhoven;
- Amsterdam: op vrijdag 29 en zaterdag 30 augustus bij het CWI.

Via *www.platformwiskunde.nl/home_vakantiecursus_wiskunde.htm* kunt u meer informatie opvragen of u aanmelden voor de cursus.

UITDAGENDE PROBLEMEN

Jacques Jansen

GROTE ASTEROÏDE SCHEERT RAKELINGS LANGS AARDE

Opgaven uit het boek kunnen soms wel wat dynamischer. Jacques Jansen gaat met u op jacht naar spannende informatie over asteroïden. Of gaat het toch om astroïden?

Net is de inspectie of een visitatiecommissie op bezoek geweest in uw les. U krijgt te horen dat de wiskundeles voor de leerlingen wat spannender mag. U bent samen met de leerlingen bijna bij opgave 33, zie figuur 1, waar het woord asteroïde in voorkomt. U tikt op Google het woord asteroïde in en vervolgens komt u terecht op een site met het volgende nieuwsbericht.

Alarmerend bericht

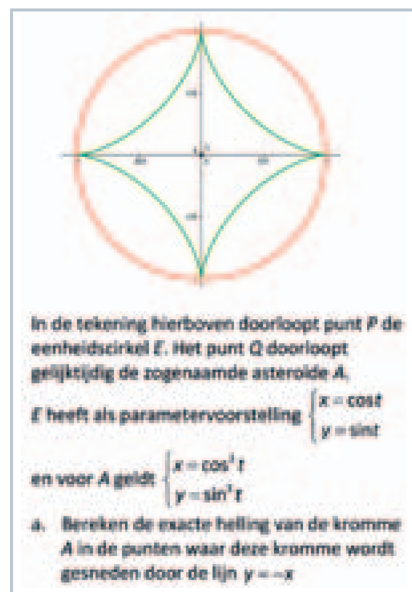
18 oktober 2013 11:02: Grote asteroïde scheerde rakelings langs aarde.

Een grote asteroïde heeft vorige maand op een haar na de aarde geraakt. Hij vloog op zo'n 6,7 miljoen kilometer afstand langs. Dat is ongeveer 20 keer de afstand van de aarde naar de maan. De asteroïde is 400 meter in omtrek en hij kreeg de naam 2013 TV135.

Maar wat kunt u met deze tekst? Het verband met de opgave is niet duidelijk. Wikipedia biedt uitkomst en vermeldt: een *astroïde* mag niet verward worden met een *asteroïde*. Is er sprake van verwarring bij opgave 33? Het lijkt er wel op. In opgave 33 gaat het niet over een stuk materie dat recht op de aarde afkomt. Nee, u ziet slechts een veilige stilstaande cirkel met een symmetrische kromme erin.

Uitdaging

U vraagt zich af of vraag 33a wel spannend en uitdagend genoeg is. Hebben de leerlingen dit altijd al willen weten? U vindt van niet en gaat aan de slag. Zo ben ik zelf dus ook aan de slag gegaan bij deze opgave. Op internet vond ik een kort filmpje,[1] zie ook figuur 2.



In de tekening hierboven doorloopt punt P de eenheidscirkel E. Het punt Q doorloopt gelijktijdig de zogenaamde asteroïde A.

E heeft als parametervoorstelling $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$

en voor A geldt: $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$

a. Bereken de exacte helling van de kromme A in de punten waar deze kromme wordt gesneden door de lijn $y=-x$

figuur 1 Een deel van opgave 33. Bron: *Moderne Wiskunde* editie 9 leerboek vwo wiskunde B deel 3

In het prachtige meetkundeboek van J.M. Aarts[2] vond ik: *De astroïde is de hypocycloïde, die ontstaat wanneer een cirkel met straal r rolt langs de binnenkant van een cirkel met straal 4r. De parametervergelijking* (PV) *kan gebracht worden op de vorm:* $x=4r\cdot(\cos t)^3$ en $y=4r\cdot(\sin t)^3$.

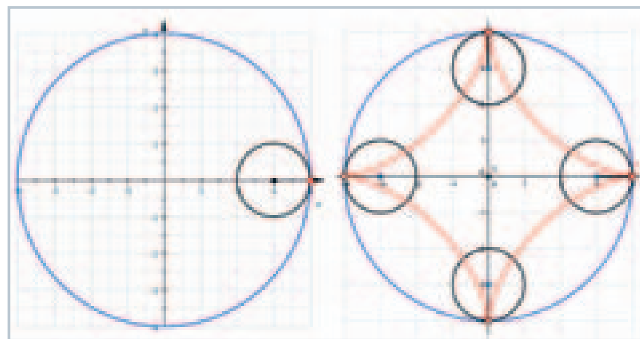
Zie verderop voor meer over de geschiedenis en de hypocycloïde. Nu eerst: hoe komt de auteur aan deze PV? Kijken we naar onze opgave, dan moeten we voor r de waarde $\frac{1}{4}$ kiezen. We gaan zelf een parametervoorstelling opstellen. Het middelpunt van de kleine cirkel beschrijft zelf een cirkel met O als middelpunt en straal $\frac{3}{4}$.

Het rode punt P, met startpositie (1,0), beschrijft de kleine cirkelbeweging, maar wel met de wijzers van de klok mee. In de 6 vwo-klas weten mijn leerlingen bij het zien van het filmpje mij te vertellen dat het rode punt P onder andere terecht komt in de noordelijkste positie van de grote cirkel met straal 1 en dat is nu in (0,1). Punt P heeft dan driekwart van de kleine cirkel afgelegd. Dat betekent dat als het kleine cirkeltje helemaal langs de binnenkant van de grote cirkel is gerold, de kleine cirkel drie keer is rondgegaan. Zie figuur 2. We moeten twee cirkelbewegingen combineren en rekening houden met de oriëntatie. Leerlingen vinden dan toch vrij snel de parametervoorstelling: $x=\frac{3}{4}\cos t+\frac{1}{4}\cos(-3t)$ en $y=\frac{3}{4}\sin t+\frac{1}{4}\sin(-3t)$. (In het nieuwe programma voor wiskunde B gaan we dat met vectoren doen![3])
Maar is deze PV gelijkwaardig met $x=(\cos t)^3$ en $y=(\sin t)^3$? Zijn de beide voorstellingen identiek? Kyla is een van de eerste leerlingen die tot een bewijs komt; zie haar berekening in figuur 3. Ik had niet verwacht dat de leerlingen het zo snel zouden vinden. Het toepassen van de gonioformules gaat haar en anderen goed af.

Raaklijnen met *Geogebra*

Op Wikipedia lezen we ook: De grootte van de raaklijn begrensd door enerzijds de x-as en anderzijds de y-as is in een astroïde altijd constant, namelijk 1.
Wat wordt hiermee bedoeld? Dat kunnen uw leerlingen

mooi uitzoeken. Eerst voeren we de astroïde in in *GeoGebra*. Dat gaat met de instructie: *kromme(cos(t)^3, sin(t)^3,t,0,2pi)*. We kiezen een willekeurig punt P op de kromme en met het knopje *raaklijnen* wordt de raaklijn in punt P getekend. De snijpunten met de x-as en de y-as noemen we achtereenvolgens A en B, zie figuur 4. Door punt P te verplaatsen op de kromme kun je een idee krijgen over wat er gebeurt met de lengte van raaklijnstuk AB. En inderdaad: de lengte van lijnstuk AB verandert niet en is steeds gelijk aan 1. Voor uw leerlingen een uitdaging om dit te bewijzen.


figuur 2 Begin- en eindpunt van een filmpje over de astroïde

Bewijs

Het is gemakkelijk na te gaan dat de coördinaten van elk punt P van de kromme voldoen aan de vergelijking

$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$. De grafiek boven de x-as kunnen we beschrijven met de formule $y=(1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$.

Geven we met p de x-coördinaat van punt P aan, dan geldt $y_P=(1-p^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$. Het is prettig om voor de uitdrukking $(1-p^{\frac{2}{3}})$ de variabele q te gebruiken; dat zal straks blijken. Er geldt dan ook $p^{\frac{2}{3}}+q=1$. Raaklijn AB kunnen we aanduiden met de vergelijking $y = ax + b$ waarvoor geldt:

- $y_P=q^{\frac{3}{2}}$;
- $a=-p^{-\frac{1}{3}}(1-p^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}=-p^{-\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{2}}$ (gevonden met kettingregel);
- $b=q^{\frac{1}{2}}$ (er geldt $q^{\frac{3}{2}}=-p^{-\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{2}}\cdot p+b$ en dat geeft $q^{\frac{3}{2}}+p^{\frac{2}{3}}q^{\frac{1}{2}}=b$, dus $b=q^{\frac{1}{2}}(q+p^{\frac{2}{3}})$);
- lengte lijnstuk AB = $l=b\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}$ (Stelling van Pythagoras) waarbij punt A wordt gegeven door $(-\frac{b}{a},0)$ en punt B door $(0,b)$. Uiteraard is $a\neq 0$.

We vullen de waarde van a en b in in de uitdrukking voor de lengte l van lijnstuk AB:

$$l=q^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{p^{-\frac{2}{3}}q}}=q^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{p^{\frac{2}{3}}}{q}}=q^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{q+p^{\frac{2}{3}}}{q}}=q^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{q}}=1.$$

Meer wetenswaardigheden over de astroïde

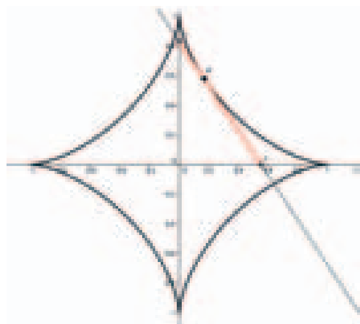
Dit raaklijnenonderzoek stimuleerde mij om in de geschiedenis van de astroïde te duiken. In de zestiende en zeventiende eeuw gaat men in de wiskunde voor het eerst dynamische processen beschrijven. Men gaat zich interesseren voor krommen die bewegende punten beschrijven. Bijvoorbeeld cirkels die rollen over rechten, maar ook cirkels die rollen over cirkels. In de laatste situatie kunnen we kijken naar een baan die wordt afgelegd door een punt op een cirkel met straal r die rolt langs de buitenzijde van een vast gekozen cirkel met straal R waarbij $r \leq R$. Deze baan wordt door de Deense sterrenkundige Ole Rømer in 1674, *epicycloide* genoemd. Bij het rollen langs de binnenkant van de grote cirkel heet de baan *hypocycloide*. In het laatste geval waarbij $R = 4r$ heet de ontstane baan *astroïde,* en daar ging het ons om!

Er gelden meer mooie eigenschappen voor een astroïde, waarbij R de straal van de grote, vaste cirkel is en r de straal van de kleine, rollende cirkel:

- omtrek = $6R$, de lengte hangt niet samen met π, terwijl je, als je naar de cirkelconstructie kijkt, dat wel zou verwachten;
- oppervlakte = $\dfrac{3\pi R^2}{8}$;
- vergelijking van de astroïde: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=r^{\frac{2}{3}}$.

Door het raaklijnenonderzoek kun je vermoeden dat de astroïde ook anders geconstrueerd kan worden. Meer weten over constructie met glijdende staaf? Zie [4]. De constructie kan ook met een binnenste cirkel waarbij r = 0,75R. De astroïde kan zelfs bekomen (zie Belgische site [5]) worden als omhullende van een stelsel ovalen. De uitdaging voor u, lezer, is om met deze eigenschappen nog wat vragen voor uw leerlingen te bedenken.

figuur 3 De berekening van Kyla.



figuur 4 Raaklijn aan een astroïde in GeoGebra

Tot slot

Mocht u toch meer geïnteresseerd zijn in de asteroïde, in verband met het raken van de aarde, dan moet u even wachten tot 2032. In dat jaar komt de asteroïde weer langs. De kans dat de asteroïde de aarde raakt, is volgens de Amerikaanse ruimtevaartorganisatie NASA zo'n 0,002 procent. Bent u ongeduldig en vindt u die kans te klein, dan kunt u alvast kijken naar de prachtige film *Melancholia* van de Deense filmregisseur Lars von Trier.

Noten en referenties

[1] Zie *http://nl.wikipedia.org/wiki/astroïde*
[2] Aarts, J.M. (2007). *Meetkunde*. Epsilon Uitgaven.
[3] Nieuwe wiskunde B-programma: *www.cve.nl/item/wiskunde_havo_vwo*
[4] Berendonk, S., & Van den Broek, L. (2013). *SpiroSporen*. Epsilon Uitgaven (Zebraboekje 38).
[5] Zie *http://blogimages.bloggen.be/gnomon/attach/114295.pdf*
Pickover, C.A. (2014). *Het Wiskunde Boek*. Librero
Zie ook *www.mathcurve.com*

Over de auteur

Jacques Jansen was 40 jaar docent wiskunde.
Hij is sinds 1 september 2012 met fpu.
E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl*

VERSCHENEN

DE JUISTE ONDERSTEUNING



Ondertitel: zwaartepunten door de eeuwen heen
Auteurs: Dolf van den Hombergh en Leon van den Broek
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2014), Zebra-reeks deel 39
ISBN: 978-90-5041-141-7
Prijs: € 10,00 (64 pagina's; paperback)

Van de achterkaft

Stabiel evenwicht kan spectaculair zijn. Om evenwicht te begrijpen let je op het zwaartepunt. Maar wat is dat eigenlijk, en hoe vind je dat? In deze Zebra worden Archimedes en Stevin gevolgd in hun axiomatische benadering van het zwaartepunt. Natuurkunde en wiskunde zijn daarbij eng verweven. De positie van het zwaartepunt wordt meetkundig geconstrueerd, maar er zal ook aan het zwaartepunt gerekend worden. En er blijken toepassingen te over te zijn.

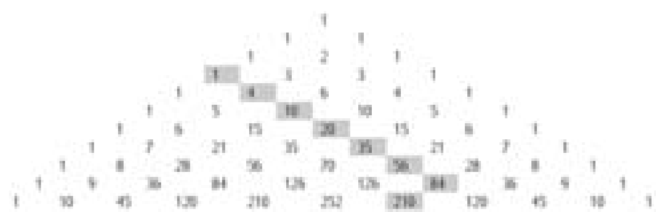
HOCKEYSTICKPATROON

VERVOLG

Bert Zwaneveld

Geïnspireerd door het artikel van Henny Versteeg over het hockeystickpatroon in de driehoek van Pascal, beschrijft Bert Zwaneveld enkele gerelateerde eigenschappen. Deze kunnen weer aanleiding geven tot denkactiviteiten voor leerlingen.

In *Euclides* 89-3 schrijft Henny Versteeg op pagina 32 een wiskundig mooi artikel over de driehoek van Pascal. Ik schrijf *wiskundig* mooi, omdat hij het hockeystick-patroon baseert op de som van meetkundige rijen. Dat patroon is de eigenschap van de driehoek van Pascal dat als je ergens op de rand van de driehoek startend, evenwijdig aan de rand ervan de getallen schuin onder het startgetal optelt, je de som op de rij eronder vindt, maar dan 'geknikt'. In figuur 1 is deze eigenschap geïllustreerd: 1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + 84 = 210.



figuur 1 Het hockeystickpatroon in de driehoek van Pascal

Het hockeystickpatroon heeft echter ook een didactische kant, die in het artikel van Versteeg niet genoemd wordt. Ik heb daarom twee didactische aanvullingen, namelijk antwoorden op de volgende twee vragen: wat is het nut van het hockeystickpatroon, en hoe kun je deze eigenschap zonder die meetkundige rijen begrijpen op basis van het constructieprincipe van de driehoek van Pascal? Dat principe luidt: op de randen staan enen en daarbinnen is elk getal de som van zijn twee aangrenzende bovenburen. Eerst de tweede vraag, daarna de eerste.

Hockeystickpatroon afgeleid uit het constructieprincipe van de driehoek van Pascal

Ik leid dit niet in zijn algemeenheid af, maar doe dit voor het voorbeeld in figuur 1. Het algemene geval gaat overigens net zo. Voor de som 210 geldt volgens het constructieprincipe: 210 = 126 + 84. Voor 126 in het rechterlid geldt: 126 = 70 + 56. En net zo voor 70: 70 = 35 + 35. Schuiven we deze drie optellingen in elkaar dan vinden we: 210 = 126 + 84 = 70 + 56 + 84 = 35 + 35 + 56 + 84. Zo doorgaande vinden we: 210 = 126 + 84 = 70 + 56 + 84 = 35 + 35 + 56 + 84 = 15 + 20 + 35 + 56 + 84 = 5 + 10 + 20 + 35 + 56 + 84 = 1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + 84, wat we wilden aantonen. Terzijde zij opgemerkt dat met deze methode, een informeel soort volledige inductie, ook aangetoond kan worden dat de som van de getallen in rij n gelijk is aan 2^n.

Het nut van het hockeystickpatroon

Het constructieprincipe van de driehoek van Pascal is in feite een recurrente betrekking. Nummeren we rijen van boven naar beneden met 0, 1, 2, ... en de getallen op rij n met 0, 1, 2, ..., n, dan noteren we het getal op rij n op plaats k met $\binom{n}{k}$. In het voorbeeld dus $\binom{10}{6} = 210$. Zoals bekend is $\binom{10}{6}$ ook het aantal verschillende routes om in een rooster vanuit het punt (0, 0) via de roosterpunten naar het punt (10, 6) te komen door in een roosterpunt naar rechts of naar boven te gaan. Hiermee is af te leiden dat $\binom{10}{6}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=\binom{10}{4}$ en daar komt inderdaad 210 uit. Op deze combinatorische afleiding ga ik hier niet in. We hebben nu dus ook een directe formule voor de getallen in de driehoek van Pascal: $\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$. En dan nu dat beloofde nut. Het eerdergenoemde hockeystickpatroon, 1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + 84 = 210, kunnen we nu ook als volgt opschrijven (waarbij de volgorde in de verschillende producten wat veranderd is):

$$\binom{3}{0}+\binom{4}{1}+\binom{5}{2}+\binom{6}{3}+\binom{7}{4}+\binom{8}{5}+\binom{9}{6}=\binom{10}{6}.\text{ Ofwel: }\frac{1\cdot2\cdot3}{3!}+\frac{2\cdot3\cdot4}{3!}+\frac{3\cdot4\cdot5}{3!}+\frac{4\cdot5\cdot6}{3!}+\frac{5\cdot6\cdot7}{3!}+\frac{6\cdot7\cdot8}{3!}+\frac{7\cdot8\cdot9}{3!}=\frac{7\cdot8\cdot9\cdot10}{3!\cdot4}.$$

Vermenigvuldigen we nu links en rechts met 3!, dan vinden we:

(1)... $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+4\cdot5\cdot6+5\cdot6\cdot7+6\cdot7\cdot8+7\cdot8\cdot9=\frac{1}{4}\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10$

Een vergelijkbaar resultaat geldt als we niet steeds producten van drie getallen, maar van een ander aantal getallen nemen. In zijn algemeenheid:

$$1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k+2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k\cdot(k+1)+\ldots+n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)=\frac{1}{k+1}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+k).$$

En dit is weer te gebruiken om bijvoorbeeld de formules af te leiden voor de som van de natuurlijke getallen 1 tot en met n (neem $k = 1$ en je vind $\sum_{j=1}^{n} j=\frac{1}{2}n\cdot(n+1)$ of voor de som van de kwadraten 1^2 tot en met n^2 (neem $k = 2$ en trek daar de formule met $k = 1$ vanaf: $\sum_{j=1}^{n} j^2=\sum_{j=1}^{n} j\cdot(j+1)-\sum_{j=1}^{n} j=\frac{1}{3}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)-\frac{1}{2}n\cdot(n+1)=\frac{1}{3}\cdot n\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot(n+1)$. En iets dergelijks voor de som van de derde machten 1^3 tot en met n^3, of hogere machten.

Tot slot

De driehoek van Pascal kan tot allerlei wiskundige denkactiviteiten voor leerlingen leiden, zoals patronen en regelmaat ontdekken en die aantonen. Een voorbeeld van zo'n patroon is de spiegelsymmetrie in de driehoek van Pascal, een gevolg van het constructieprincipe: in elke rij staan op evenveel plaatsen van de linker 1 als van de rechter 1 dezelfde getallen. Wiskundig zeggen we dat het getal op plaats k in rij n gelijk is aan het getal op plaats $n - k$. Met deze eigenschap kan optelling

$$\binom{3}{0}+\binom{4}{1}+\binom{5}{2}+\binom{6}{3}+\binom{7}{4}+\binom{8}{5}+\binom{9}{6}=\binom{10}{6}$$

nog wat 'mooier' geschreven:

$$\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{7}{3}+\binom{8}{3}+\binom{9}{3}=\binom{10}{4}$$

. Hierdoor wordt de afleiding van optelling (1) nog wat eenvoudiger. Zie voor meer over wiskundige denkactiviteiten hoofdstuk 11 van Anne van Streun en Peter Kop in *Handboek Wiskundedidactiek* (Epsilon, red.: Paul Drijvers, Anne van Streun en Bert Zwaneveld).

Over de auteur

Bert Zwaneveld was wiskundeleraar, hoofdredacteur van *Euclides* en later voorzitter van de redactie van *Euclides*. Inmiddels is hij emeritus-hoogleraar professionalisering van de leraar in het bijzonder in het wiskunde- en informaticaonderwijs van de Open Universiteit.
E-mailadres: *g.zwaneveld@uu.nl*



MEDEDELING

MATERIALEN VOOR STATISTIEK

Er is een nieuw statistiekprogramma voor havo en vwo in aantocht. Het programma wordt wel gekenschetst als werken met grote datasets. Dat doet het nieuwe domein tekort. Om datasets te kunnen analyseren, is ICT nodig. Die inzet is onontbeerlijk zoals de laatste eindterm van het nieuwe domein statistiek van zowel havo A als vwo A en C expliciet aangeeft. Wie de eindtermen doorneemt, begrijpt dat de rol van ICT meer omvat. Voor het begrijpen en doorgronden van statistische concepten zijn goede simulaties onmisbaar. Een goed voorbeeld is de steekproevenverdeling, een statistisch concept dat de grondslag vormt voor het doen van verantwoorde statistische uitspraken.
Voor wie kennis wil maken met de nieuwe statistiek is nu ruim materiaal voorhanden. Dit materiaal bestaat uit een *Digiboek Statistiek*, gebaseerd op practica uit de pilot havo A, grondig herzien en uitgebreid op grond van ervaring en expertise. Het digiboek staat op de cTWO-site onder 'lesmateriaal'. Het *Digiboek Statistiek* is ook te vinden op de site *www.rustroest.eu*. Deze site biedt een dynamische *hands-on*-handreiking met nog meer concrete materialen en ideeën voor een nadere kennismaking met het nieuwe statistiekdomein. De inhoud is geschreven op leerlingniveau en kan zowel in de klas als thuis ingezet worden. Docenten kunnen de materialen vrij gebruiken om een idee van de nieuwe statistiek te krijgen en/of om iets in de klas uit te proberen.

Carel van de Giessen
E-mailadres: *carelvdg@planet.nl*

RUBRIEK WISKUNDE DIGITAAL

Lonneke Boels



GO ROUND EN 2048

Vlak voor de zomer laat Lonneke Boels u kennismaken met twee leuke wiskundespellen. Een waarschuwing is echter op zijn plaats: de spellen zijn nogal verslavend. Ideaal dus voor de komende vakantieperiode.

Go Round



figuur 1

Geschikt voor: iPhone, iPad en iPod touch.
Vereist iOS 5.0 of nieuwer.

Go Round, zie figuur 1, is een spel met als doel om stenen naar het midden van het spel te schuiven en de ringen 'leeg' te maken, ten minste, voor zover dat nodig is... Dit kan zodra er drie stenen van dezelfde kleur worden gecombineerd. Stenen die van buiten naar binnen schuiven, leveren punten op. Des te verder de stenen opschuiven naar de binnenring, des te meer punten de stenen opleveren. In elke ronde zijn er andere doelen.
In het begin is het doel om het vereiste aantal punten te halen. In de volgende ronden wordt dit doelaantal verhoogd. Na enige tijd komen er hindernissen bij: specifieke stenen moeten verplicht naar de binnenring worden geschoven, er liggen blokkades die moeten worden omzeild of tegen 'kosten' kunnen worden opgeblazen, een steen moet tussen twee andere worden ingeklemd, enzovoort. Hierdoor moet je steeds nieuwe strategieën bedenken om het spel op te lossen. De ene keer neem je zoveel mogelijk stenen van de buitenste ring mee naar het midden; de volgende keer ben je verplicht je te concentreren op precies die stenen die per se opgeruimd moeten worden, wil je het spel ooit uit kunnen spelen. Juist deze uitdaging maakt het spel zo leuk en verslavend.
Het spel kent in totaal 100 ronden. Als het onmogelijk lijkt om een ronde af te maken, kun je hulpmiddelen 'kopen'. Hiervoor heb je punten nodig die je verzamelt door een spel te spelen en bij voorkeur te voltooien.
Wie alle ronden af heeft, begint opnieuw, maar krijgt wel zoveel bonuspunten dat je nooit meer punten tekort komt om welk hulpmiddel dan ook aan te schaffen. Het is mogelijk om het spel uit te spelen zonder geld uit te geven aan hulpmiddelen; het is mij in een zomervakantie gelukt. In het begin moet je hiervoor een ronde vaker spelen; gevorderden hoeven zelden meer een ronde opnieuw te doen.

Pluspunten

- het is een echt spel;
- het is een strategisch spel;
- door handig combineren kun je hoger scoren;
- een strategie die in een ronde werkt, werkt in de volgende ronde mogelijk niet meer.

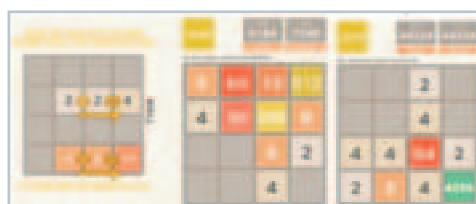
Minpunten

- het is verslavend;
- er is geen directe link met de wiskunde in de klas;
- er zitten *in-app* aankopen in het spel. Deze zijn echter niet noodzakelijk;
- bevat reclamevideo's die je voor 250 *coins* kunt bekijken. Die kun je gelukkig makkelijk overslaan en je krijgt de melding alleen als je verliest;
- de uitleg is in het Engels.

Eindoordeel: aanschaffen

Kosten: geen.
Geschikt voor: basisschool groep 6, 7, 8, vmbo, havo en vwo.
Getest op: iPad met iOS7
Meer informatie: *www.littlewhitebearstudios.com/*; *http://toucharcade.com/2013/05/31/go-round-review/*

2048



figuur 2

Geschikt voor: iPhone, iPad en iPod touch.
Vereist iOS 4.3 of nieuwer.

Ook te vinden voor Windows Phone en Android. Er is tevens een internetversie die met de pijltjestoetsen werkt.

2048, zie figuur 2, is een spel dat in korte tijd al een rage is onder middelbare scholieren, maar dat zeker ook geschikt is voor de basisschool. Het doel van het spel is

om een steen te maken met de waarde 2048. Je start met twee stenen, meestal twee tweeën. Als je die tegen elkaar aan schuift, worden twee stenen één met een nieuwe waarde van vier. Evenzo worden twee vieren samen acht, twee achten samen zestien, enzovoorts. Uiteraard allemaal machten van twee. Het was u vast al opgevallen dat 2048 ook een macht van 2 is, namelijk 2^{11}. Wie het spel in het wilde weg speelt, komt een heel eind maar hoger dan 1024 wordt lastiger. Maar er is een strategie die tot hoge scores leidt en de steen van 2048 in korte tijd bereikbaar maakt, zie *vakbladeuclides.nl/897boels2*. De auteur is inmiddels verslaafd en heeft de 4096-steen al behaald. Op naar de 8192!

Pluspunten

- het is een echt spel;
- na dit spel kent de leerling alle machten van twee;
- leerlingen vinden het een ontzettend leuk spel;
- een slimme strategie leidt tot betere resultaten.

Minpunten

- de link tussen machten van twee en de bijbehorende exponenten wordt niet geleerd;
- het is zeer, zeer verslavend;
- de reclame onderaan is hinderlijk. Bij verkeerd *swipen* opent deze nogal eens ongewenst een nieuwe website. Voor € 1,99 kun je de advertenties verwijderen.

Eindoordeel: aanschaffen

Kosten: geen;
Geschikt voor: basisschool groep 6, 7, 8, vmbo, havo en vwo.
Getest op: iPad met iOS7, Samsung Windows Phone
Meer informatie: *http://git.io/2048*

Noot redactie

Van 2048 is ook een 4d-versie beschikbaar, zie *http://huonw.github.io/2048-4D/*

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft, directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen en freelance docent vakdidactiek rekenen op pabo's. E-mailadres: *L.Boels@alaka.nl*

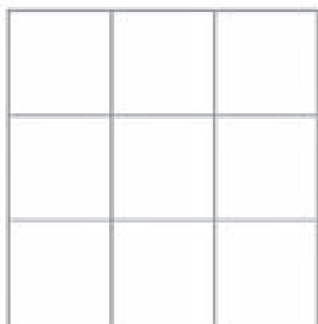
WISKUNDE OF REKENEN IN 2 VMBO

Ab van der Roest

Ab van der Roest had een uurtje rekenen te vullen in 2 vmbo en deelt zijn ervaring in dit artikel.

Dit jaar geef ik les aan een 2 vmbo-klas. Naast drie uur wiskunde geef ik een uur rekenen. Bij het rekenen gebruiken we een digitale methode. De leerlingen werken zelfstandig en de leraar helpt als een leerling erom vraagt. Soms wordt er een toets afgenomen. De vmbo-leerling vindt het best lastig om 45 minuten achter elkaar door te werken. Dat heeft tot gevolg dat de lessen rumoerig zijn. Verder is het ook lastig om zichzelf te beoordelen. Als er hulp gevraagd wordt, is het vaak onduidelijk wat de leerling zelf geprobeerd heeft. Om die reden moet de leerling naast zijn computer altijd een kladblaadje hebben, waarop ik kan zien wat ze zelf al geprobeerd hebben als ze een vraag stellen. Probleemaanpak is bij wiskunde belangrijk, maar bij rekenen ook. Met een digitale methode is dat moeilijk te volgen, maar soms zijn er buitenkansjes.

Op donderdag was er geen computerlokaal beschikbaar en had ik zomaar een klassikale les. 'Wat gaan we doen?', 'Waarom hebben we geen computer?', 'Kunnen we niet gewoon vrij krijgen?' Dat waren de vragen die me door de leerlingen gesteld worden. Ik moest dus een les geven waarbij ik niet de beschikking had over de methode en die leerlingen 'leuker' zouden vinden dan een gewone les. Ik heb magische vierkanten gedaan; eigenlijk alleen het 3 bij 3 vierkant. Het vierkant tekende ik op het bord met de opdracht de getallen 1, 2, 3 tot en met 9 zo te plaatsen dat de som van de rijen en van de kolommen en van de diagonalen hetzelfde was.



Wat deze som zou worden, vertelde ik er niet bij. Leerlingen gingen in het wilde weg proberen. Ze deden dit in groepjes van twee of drie. Een aantal keren werd ik bij de tafel geroepen om te controleren of hun oplossing goed was. Het viel niet mee. Op een zeker moment vroeg Chhabi hoeveel 45 : 3 is. Ik keek haar vragend aan, en ze gaf zelf het antwoord: 15. Hierna vertelde ik aan de klas wat Chhabi ontdekt had. De zoektocht ging verder en nadat Jacco als eerste de goede oplossing had, volgden de anderen al snel.
Daarna introduceerde ik het volgende probleem. Bij de oplossingen staat de 5 steeds in het middelste vakje; moet dat? En, zijn de oplossingen die we gevonden hebben echt verschillende oplossingen? De laatste vraag was de makkelijkste. De klas was het al snel met elkaar eens dat de oplossingen eigenlijk niet echt anders waren. Het zijn steeds dezelfde drie getallen die naast of boven elkaar staan. Dus als we de vierkanten iets draaien en eventueel van beneden naar boven lezen, dan zijn ze hetzelfde. Nu nog de 5 in het midden. Er was niet voldoende tijd om dat de leerlingen zelf te laten ontdekken; we naderden ook het einde van de bekende boog. Daarom heb ik zelf de aanwijzing gegeven. We hebben de sommetjes die we met drie toegestane getallen en uitkomst 15 kunnen maken, gemaakt:

$1 + 5 + 9 = 15$
$1 + 6 + 8 = 15$
$2 + 4 + 9 = 15$
$2 + 5 + 8 = 15$
$2 + 6 + 7 = 15$
$3 + 4 + 8 = 15$
$3 + 5 + 7 = 15$
$4 + 5 + 6 = 15$

Acht sommetjes en ik heb in het vierkant precies acht sommetjes nodig. De 5 komt in vier sommetjes voor, en dat betekent dat 5 centraal moet komen te staan. Zodra we nu een hoek gekozen hebben, ligt de rest vast.
Het rekenwerk viel vandaag wel mee. Probleemaanpak stond centraal. Of ben ik nu stiekem met wiskunde bezig geweest?

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal.
E-mailadres: rst@ichthuscollege.nl

NIEUW

Math Plus

Tijd voor een nieuwe wiskundemethode

MathPlus maakt wiskunde aantrekkelijker en uitdagender voor alle leerlingen.



Ontdek de voordelen

- Makkelijker inspelen op niveauverschillen tussen leerlingen
- Direct inzicht in resultaten bij docent en leerling zelf
- Interactieve en levendige leerstof
- De methode die altijd aansluit, tegen een aantrekkelijke prijs

Maak kennis met MathPlus op www.mathplus.nl en meld u aan voor een demonstratie.



MALMBERG

BOEKBESPREKING



Jan van de Craats

MUZIEK UITGEDRUKT IN GETALLEN



Ondertitel: De toonklasseverzamelingentheorie en haar toepassingen
Auteurs: Aline K. Honingh en Michiel Schuijer
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2013), Zebra-reeks deel 36
ISBN: 978-90-5041-137-0
Prijs: € 10,00 (76 pagina's; paperback)

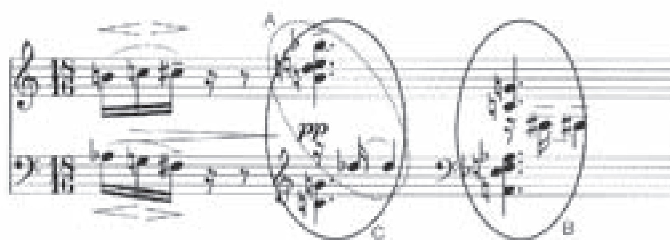
Dit deeltje in de Zebra-reeks richt zich vooral op leerlingen met belangstelling voor wiskunde die bovendien geïnteresseerd zijn in atonale twaalftoonsmuziek zoals die in de twintigste eeuw ontwikkeld is door componisten als Arnold Schönberg, Alban Berg en Anton Webern. Ik denk dat zij het met interesse zullen lezen. Uitgangspunt is de verdeling van het octaaf in twaalf gelijke deelintervallen. Het gehele spectrum van alle mogelijke toonhoogten wordt dus gediscretiseerd en daarnaast worden tonen die een octaaf verschillen geïdentificeerd.

Op die manier ontstaan twaalf zogenaamde toonklassen. Melodieën en samenklanken worden afgebeeld op verzamelingen van die twaalf toonklassen, de toonklasseverzamelingen. Daarbij gaat de melodische, harmonische en ritmische structuur verloren. Er wordt slechts gewerkt met verzamelingen van hoogstens twaalf elementen.
Rond die verzamelingen is door de musicoloog Allen Forte een theorie gebouwd van bewerkingen die je op toonklassenverzamelingen kunt uitvoeren, bijvoorbeeld complement nemen of inversies en transposities toepassen. Zo kom je al gauw terecht op het terrein van de combinatoriek en het rekenen modulo 12. Vandaar de titel: *Muziek uitgedrukt in getallen*. Het kan interessant zijn om, met de partituur in de hand, te zien hoe componisten als Milton Babbitt en Elliot Carter zich hierdoor hebben laten inspireren. De auteurs geven daarvan enige voorbeelden.

Sommige theoretici proberen ook bestaande tonale muziek binnen het kader van de toonklasseverzamelingstheorie te beschrijven. De voorbeelden daarvan die de beide auteurs in dit boekje geven, zijn echter weinig overtuigend. Dat is niet verwonderlijk omdat juist belangrijke aspecten van de westerse tonale muziek zoals stemvoering, harmonie en ritme, in deze theorie buiten beschouwing blijven.

Over de recensent

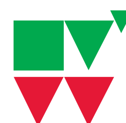
Jan van de Craats is emeritus hoogleraar wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam. Hij schreef over het verband tussen muziek, wiskunde en natuurkunde het Zebra-boekje *De juiste toon*.
E-mailadres: *J.vandeCraats@uva.nl*



Figuur 3.11: Maat 30 uit Schönbergs Fünf Klavierstücke deel 3, ter illustratie van het begrip "complement". Verzameling $B : \{0,3,5,6,7,8,9\}$ is het letterlijke complement van verzameling $A : \{1,2,4,10,11\}$. Verzameling $C : \{0,1,2,4,7,10,11\}$ is een inversie van verzameling B, en een daarom abstract complement van de verzameling A [12, 5].

figuur 1 Gebruikt na toestemming van Imagem Music | CP Masters

JAARVERGADERING/STUDIEDAG 2014



Eerste uitnodiging
Dit is de eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 2014 van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op **zaterdag 8 november 2014**.
Aanvang: 10:00 uur
Sluiting: 16:00 uur
Plaats: Ichthus College, Vondellaan 4, 3906 EA Veenendaal_

Themagedeelte van de studiedag
Wiskunde in beweging

Dat wiskunde(onderwijs) in beweging is, ervaren we al jaren. De tijd dat je met je lesvoorbereiding rustig tien jaar kon teren op de ervaringen van vorige jaren ligt al ver achter ons. Nieuwe examenprogramma's, tussendoelen, rekentoetsen en een breed scala aan nieuwe (didactische) hulpmiddelen zorgen ervoor dat we voortdurend op zoek zijn naar verantwoorde manieren om onze leerlingen te helpen bij het leren van ons geliefde vak. Maar met 'Wiskunde in beweging' willen we tijdens de studiedag ook andere aspecten van wiskundeonderwijs voor het voetlicht krijgen. Uiteraard zijn daar de moderne hulpmiddelen van de ICT die het leren van wiskunde op een dynamische manier didactisch verantwoord kunnen ondersteunen. Maar heeft u wel eens nagedacht over het gebruik van film(pje)s in de les om leerlingen te motiveren een wiskundig onderwerp serieus te nemen? Heeft u wel eens iemand uit het bedrijfsleven in de klas uitgenodigd om enthousiast te vertellen waarom wiskunde zo belangrijk is in zijn/haar beroepspraktijk? Heeft u wel eens, samen met collega's op school of in de regio, lesmaterialen ontwikkeld die het gewone lesgebeuren van 'werken uit het wiskundeleerboek' kunnen doorbreken?
Wiskunde in beweging heeft naar onze mening twee kanten:
- de door de overheid opgelegde eisen, zoals nieuwe examenprogramma's, verplichte rekentoetsen en het voldoen aan tussendoelen. Als docent moet je daar binnen de school aan voldoen;
- uw persoonlijke invulling van het dagelijks lesgebeuren zoals u dat voor ogen staat, wellicht mede gestimuleerd door samenwerking met collega's bij het maken van zinvolle lesactiviteiten (bijvoorbeeld via de Vaksteunpunten Wiskunde bij u in de buurt), het inzetten van nieuwe hulpmiddelen bij het leren van wiskunde.

Wist u dat veel collega's het heel fijn vinden om te horen en te ervaren hoe u met uw leerlingen lessen interessant maakt?

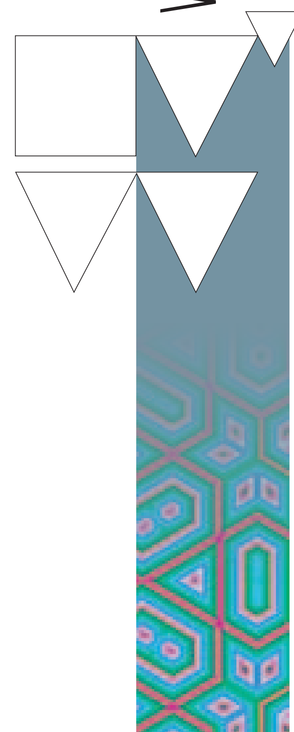
We zien graag bijdragen voor:
- leservaringen bij onderwerpen van de nieuwe examenprogramma's havo/vwo;
- het aanhaken bij andere vakken dan wiskunde in vmbo/havo/vwo;
- wiskundeprofessionals in de klas;
- op bezoek bij het bedrijfsleven met de klas;
- het gebruik van nieuwe ict-middelen in het onderwijs;
- samen onderwijs maken in de regio.

Voorstellen voor workshops kunt u sturen naar Lidy Wesker-Elzinga (e-mailadres: *L.J.B.Elzinga@uva.nl*) of naar Henk van der Kooij (e-mailadres: *henkvanderkooij@gmail.com*).

Agenda

10:00–11:00 uur – **Jaarvergadering**
1. Opening door de voorzitter, mevr. M. Kollenveld.
2. Jaarrede door de voorzitter.
3. Notulen van de jaarvergadering 2013.

4. Jaarverslagen 2013/2014 NVvW en *Euclides* (zie een volgend nummer van *Euclides*).
5. Jaarrekening en balans 2013/2014, verslag kascommissie, decharge van de penningmeester, vaststelling contributie en benoeming nieuwe kascommissie.
6. Bestuursverkiezing. De voorzitter mevr. M. Kollenveld en de secretaris C. Lagerwaard treden af en stellen zich niet herkiesbaar. De heer D. van der Kooi is aftredend en stelt zich herkiesbaar. In *Euclides* nummer 1 van september zal het bestuur in de tweede uitnodiging nieuwe bestuurskandidaten voorstellen. Het bestuur nodigt leden van harte uit zich te melden wanneer zij belangstelling hebben voor een plaats in het bestuur (e-mailadres: *secretaris@nvvw.nl*).
7. Rondvraag.
8. Sluiting van de jaarvergadering.



Programma Studiedag

11:00 – 11:15	Inleiding op de studiedag
11:15 – 12:00	Plenaire lezing
12:00 – 12:15	Koffie/thee
12:15 – 13:15	Workshopronde 1
13:15 – 14:00	Lunchpauze, marktbezoek
14:00 – 15:00	Workshopronde 2
15:00 – 15:20	Koffie/thee
15:20 – 16:00	Plenaire voordracht
16:00 – 16:10	Afsluiting

Dus reserveer in uw agenda: zaterdag 8 november NVvW–dag

In het volgende nummer van *Euclides* krijgt u nadere informatie over wat u kunt verwachten op 8 november 2014. Voor meer praktische informatie over de organisatie kunt u zich eventueel wenden tot Marianne Lambriex (e-mailadres: *m.lambriex@nvvw.nl*).

VERSCHENEN

KANTELPUNTEN EN ALTERNATIEVE EVENWICHTEN



Auteurs: Lia Hemerik, Egbert van Nes en Theo-Jan van de Pol
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2014), Zebra-reeks, deel 40
ISBN: 978-90-5041-142-4
Prijs: € 10,00 (60 pagina's; paperback)

Van de achterkaft

Waarom is het zo moeilijk om weer vrede te sluiten na het uitbreken van een oorlog? Het punt van omslag van vrede naar oorlog ligt op een heel ander punt dan de omslag van oorlog naar vrede. Dit soort situaties met zogenaamde 'hysterese' treden in veel andere systemen op zoals ecosystemen, financiële markten en klimaatsystemen. Hoe deze hysterese in eenvoudige modellen optreedt is het onderwerp van studie in dit boekje. In deze Zebra wordt op een duidelijke manier uitgelegd hoe je kantelpunten kan ontdekken in een systeem dat geleidelijk verandert en hoe alternatieve evenwichten als gevolg van een langzaam veranderende omgevingsvariabele kunnen optreden.



Ernst Lambeck

BOEKBESPREKING

WISKUNDE, DAT KUN JE BEGRIJPEN



Auteurs: Martin Kindt en Ed de Moor
Uitgever: Bert Bakker, Amsterdam (2012)
ISBN: 978 90 351 3805 6
Prijs: € 19,95 (272 pagina's; paperback)

Vernieuwde uitgave

Het hier te bespreken boek is een vernieuwde uitgave van het in 2008 verschenen *Wiskunde in een notendop*.[1] Het werd in hetzelfde jaar in *Euclides* besproken door Ger Limpens.[2] In deze nieuwe uitgave zijn drie nieuwe hoofdstukken toegevoegd, getiteld *Complexe getallen*, *Sinus & Co* en *De mooiste formule*.

Complexe getallen worden geïntroduceerd via de oplossingsformule van Cardano en Tartaglia voor derdegraadsvergelijkingen. Dit gebeurt wel vaker, maar nieuw voor mij was de manier waarop Tartaglia zijn recept heeft gevonden en de link met de formule waarmee de Babyloniërs twee getallen zochten waarvan het product P en de som S bekend zijn: $x_{1,2} = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P}$. In dit hoofdstuk komen verder algemene zaken als de rekenregels, modulus en argument aan de orde.

In *Sinus & Co* komen bekende goniozaken als sinus- en cosinusregel en radialen aan bod. Maar ook de stelling uit de cirkelmeetkunde over omtrekshoek en middelpuntshoek op dezelfde cirkelboog wordt besproken. Ook in dit hoofdstuk weer iets wat nieuw voor mij was: koordenrekening. Voor een koorde krd(α) bij een middelpuntshoek α worden een tweetal formules afgeleid, die via de betrekking $2\cos\alpha = \text{krd}(180° - 2\alpha)$ kunnen worden vertaald naar de ons bekende formules $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$ en $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ Lezers van *The Mathematics Intelligencer* kozen in 1988 de formule van Euler, $e^{\pi i} + 1 = 0$ tot de mooiste formule. Deze formule staat centraal in hoofdstuk 17 en volgt uit de betrekking $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, welke wordt afgeleid uit de machtreeksen voor $\cos x$, $\sin x$, en e^x door in de laatste machtreeks x te vervangen door ix. Een mooi idee voor een les wiskunde D!

Opgaven

Aan het eind van elk hoofdstuk zijn nu een aantal opgaven opgenomen. Ik vraag me af met welk doel. Antwoorden en/of uitwerkingen worden niet gegeven, dus oefening lijkt niet het doel te zijn. In het voorwoord schrijven de auteurs dat de opgaven eenvoudig en hopelijk verrassend zijn. Maar toch zijn er opgaven die je ook in een gewoon schoolboek zou kunnen tegenkomen, zoals bijvoorbeeld opgave 4 van hoofdstuk 6 (*Kans en verwachting)*: 'Voor het rijexamen slaagt gemiddeld één van de zes kandidaten in één keer. Op een middag zijn er 12 kandidaten die voor de eerste keer rijexamen afleggen. Hoe groot is de kans dat er meer dan twee slagen?'

Ook zijn er opgaven die inderdaad verrassend zijn (ik heb ze in elk geval nog nooit eerder gezien), zoals bijvoorbeeld, zie figuur 1, opgave 6 van hoofdstuk 8 (Aanschouwelijke meetkunde). Ten slotte zijn er ook nog wat opgaven die eigenlijk niet wiskundig zijn. Wat bijvoorbeeld te denken van opgave 2 uit hoofdstuk 1 (*5000 jaar cijfers en getallen*):

'Het getal $\frac{41}{333}$ wordt wel het André-Rieu-getal genoemd. Hoe is dat te verklaren?'

Aanvullingen

Behalve de drie extra hoofdstukken en de opgaven zijn er ook op veel plaatsen stukjes tekst toegevoegd. Het voert te ver om die allemaal te noemen, maar twee voor mij verrassende zaken wil ik toch even aanstippen: je kunt met drie bankpasjes het draadmodel van een regelmatig twintigvlak bouwen (pagina 186) en er bestaat een verband tussen de helix en de cycloïde (pagina 239). De auteurs zijn er goed in geslaagd deze aanvullingen te verwerken in de tekst, al zijn er wel enkele schoonheidsfoutjes bij verwijzingen te vinden. Zo wordt bijvoorbeeld aan het eind van hoofdstuk 13 opgemerkt 'In hoofdstuk 13 zullen we de formules die hierbij horen nader verklaren'. Bedoeld wordt hoofdstuk 15, wat in de eerste druk hoofdstuk 13 was... Ik heb vaak getwijfeld of ik, in het bezit van de eerste druk, deze vernieuwde uitgave zou moeten kopen. Die twijfel was onterecht, dit boek bevat voor mij voldoende nieuwigheden. Eigenlijk kan ik het alleen maar eens zijn met de bespreking van Ger Limpens destijds voor de eerste druk van dit boek.

Noten

[1] Kindt, M. en de Moor, E. (2008). *Wiskunde in een notendop*, Uitgeverij Bert Bakker
[2] Limpens, G. (2008). Boekbespreking Wiskunde in een notendop, *Euclides*, 84(3), pagina 108. Zie ook *vakbladeuclides.nl/897lambeck*

Over de recensent

Ernst Lambeck is docent wiskunde aan het Newmancollege te Breda. E-mailadres: *elambeck@newmancollege.nl*

PUZZEL 89-7

STOELENDANS OP EEN TERRASJE

Lieke de Rooij
Wobien Doyer

Met de zomer in het vooruitzicht en een terrasje in de zon dachten we onmiddellijk aan een idee van Frits Göbel over tafelschikkingen. Het is een wat minder bekende toepassing van een formule van een oude bekende meester. We voegden daar nog een andere meester aan toe en een tafeltje in de ruimte.



Opgave 1 (van F. Göbel) – Aan een lange terrastafel met n stoelen zitten n mensen op een rijtje in alfabetische volgorde. Om die volgorde te veranderen, mag (hoeft niet) iedereen hoogstens één plaats opschuiven. Er worden geen stoelen bijgezet of weggehaald en iedereen moet weer een plaatsje hebben gevonden.

a. Hoeveel mogelijke volgorden zijn er na zo'n stoelendans als $n = 6$?
b. Geef een formule/algoritme om dit te berekenen voor n mensen en n stoelen. Dat mag recursief, direct, of nog mooier allebei, maar één methode is voldoende.
c. Welke oude meester wordt hier in het zonnetje gezet?

Opgave 2 – Idem, maar nu zitten de mensen aan een ronde tafel. Twee tafelschikkingen zijn verschillend als niet iedereen weer dezelfde linker- en rechterbuur heeft, dus iedereen een plaatsje naar links (of rechts) geeft geen nieuwe tafelschikking. Beantwoord ook hier vraag a, b en c.

Opgave 3 – Nu een driedimensionale tafelschikking voor zes mensen. De 'tafel' is een kubus met aan elk vlak een zitplaats. Die 'tafel' zweeft in de ruimte, dus rotatie in welke richting dan ook verandert niets aan de tafelschikking. Spiegelen wel.

a. Hoeveel echt verschillende tafelschikkingen zijn er?
b. Vanaf een gegeven tafelschikking mag iedereen (hoeft niet) verhuizen naar een naast gelegen vlak. Hoeveel echt verschillende mogelijkheden biedt deze stoelendans?
c. Idem, maar nu mag (hoeft niet) iedereen stuivertje wisselen met een van z'n buren. Iedereen mag dat hoogstens één keer doen. Hoeveel echt verschillende tafelschikkingen zijn er na die dans in de ruimte?

Inzenden oplossingen

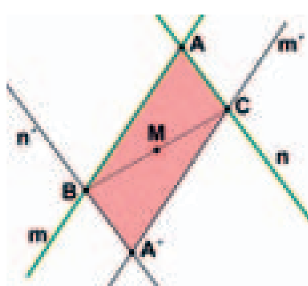
Gehele of gedeeltelijke oplossingen kunt u weer mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811 NN Reeuwijk. Er zijn weer 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij uw idee voor een nieuwe puzzel gebruiken. De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. De deadline is 25 augustus a.s. Wij wensen u veel plezier en een zonnige zomer.

UITWERKING PUZZEL 89-5

DE MEETKUNDIGE PLAATS VAN HET MIDDEN

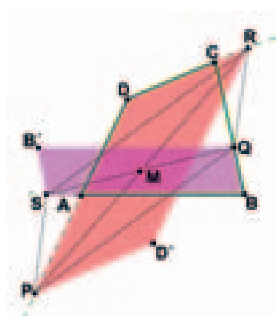
Wobien Doyer
Lieke de Rooij

Deze puzzel ging over vierhoeken $ABCD$. Het was de bedoeling om op elk van de zijden van de vierhoek of verlengden daarvan een punt te kiezen, zodanig dat die vier punten de hoekpunten vormen van een parallellogram met een gegeven punt M als middelpunt. Er waren zestien inzendingen.



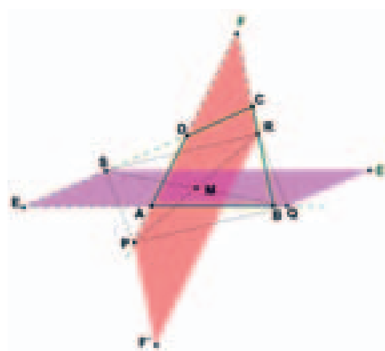
figuur 1

Opgave 1 was een opstapje naar de rest: Gegeven twee lijnen m en n met snijpunt A en een punt M. Bepaal punt B op m en C op n, zodat M het midden is van BC. Dit leverde niet veel problemen op. De meeste oplossingen komen neer op het spiegelen van A, m en n in M. De resulterende figuur is een parallellogram waarvan beide diagonalen door M gaan. De ene diagonaal is AA', de andere het gevraagde lijnstuk BC met midden M. We kunnen ook nog opmerken dat er precies één oplossing is voor lijnstuk BC, zie figuur 1.



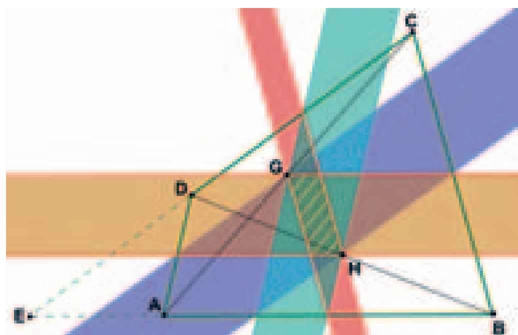
figuur 2

Bij de **opgaven 2 en 3a** waren $ABCD$ en M gegeven en moest een parallellogram $PQRS$ worden geconstrueerd zoals boven beschreven. Dat kon door de methode van opgave 1 toe te passen op twee paar verschillende elkaar snijdende zijden van $ABCD$. De zo geconstrueerde twee lijnstukken met M als middelpunt vormen de diagonalen van het gevraagde parallellogram $PQRS$, zie figuur 2.
Bij opgave 2 was $ABCD$ een vierkant en was er alleen een keuze tussen de zijdeparen (AB,BC) en (CD,AD) of (BC,CD) en (AB,AD). Dat levert twee oplossingen. Bij opgave 3 was $ABCD$ een convexe vierhoek en kon ook nog worden gekozen voor paren overstaande zijden: (AB,CD) en (BC,AD), zie figuur 3, zodat daar drie verschillende oplossingen zijn (**opgave 3b**).

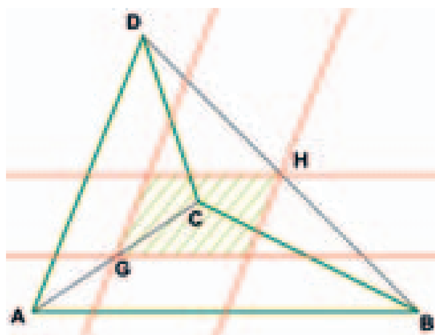


figuur 3

Bij **opgave 4** was alleen $ABCD$ gegeven en moest de meetkundige plaats van het midden M worden bepaald, zodanig dat de hoekpunten van $PQRS$ elk op een verschillende echte zijde van $ABCD$ liggen, dus niet op de verlengden daarvan.
Kiezen we paren aangrenzende zijden, bijvoorbeeld (AB,AD) en (BC,CD), dan valt van de lijnstukken die de diagonalen van het parallellogram zouden moeten zijn de ene binnen driehoek ABD en de andere binnen driehoek BCD, wat natuurlijk niet kan. We moeten dus kiezen voor paren overstaande zijden.
Bekijk nu in figuur 3 het paar (AB,CD) met snijpunt E en $E'Q$ evenwijdig aan CD. Wil Q op AB liggen, dan moet de lijn door M evenwijdig aan CD, AB snijden tussen het midden van EA en het midden van EB. M ligt dus in elk geval op de blauwe strook in figuur 4. Voor de andere



figuur 4



figuur 5

drie punten van *PQRS* zijn er analoog nog drie stroken waar *M* op moet liggen. Het is een leuke vraag voor in de meetkundeles om aan te tonen dat die stroken precies liggen tussen punten *G* en *H*, de middens van de diagonalen van *ABCD*. Het gezochte punt *M* ligt dus op het overlappende deel van die stroken. En dat blijkt het vlak te zijn binnen een parallellogram met diagonaal *GH* en zijden parallel aan de zijden tegenover de grootste hoek van *ABCD*. De constructie van die gevraagde meetkundige plaats kan dus volstaan met de rode lijnen in figuur 4. Het arceren van gebieden waar *M* al dan niet mag liggen deed denken aan lineair programmeren in het oude wiskunde A-programma.

Als extra vraag was nog een concave vierhoek *ABCD*, waar *M* ook buiten mag liggen. Zie figuur. 5. De constructie met overstaande zijden is identiek aan het voorgaande en geeft een parallellogram gedeeltelijk buiten *ABCD*. Maar nu is het ook mogelijk om de aangrenzende lijnenparen (*AB*,*AD*) en (*BC*,*CD*) te gebruiken. Dat levert het deel van het reeds geconstrueerde parallellogram op dat buiten *ABCD* valt. De conclusie is dan: *M* ligt in het gearceerde parallellogram. Met *M* in het gearceerde gebied buiten *ABCD* zijn er twee mogelijke oplossingen voor *PQRS* met de hoekpunten op de echte zijden van *ABCD*.

LADDERSTAND

Top-10 van de ladderstand na 89-5 is:

F. Göbel	157
G. Bouwhuis	156
J. Meerhof	144
H. Bakker	132
R. Stolwijk	127
J. Verbakel	110
L. Pos	104
G. Riphagen	102
J. Remijn	90
H. Linders	69

De ladderprijs is gewonnen door Frits Göbel. Hartelijk gefeliciteerd daarmee!

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie
Marjanne de Nijs, hoofd- en eindredacteur
Birgit van Dalen, adjunct-hoofdredacteur
Nathalie Kuijpers, adjunct-eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Dick Klingens
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Joke Verbeek, secretaris
Heiner Wind, voorzitter

Inzenden bijdragen
Marjanne de Nijs, Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Marian Kollenveld, Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 70 04 E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Lagerwaard, Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46 E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 80,00
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 50,00
- studentleden (tot 27 jaar) en gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 50,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v. t.a.v. F. van Dop
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskunde-leraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2014

vr/za 22/08 23/08 — EINDHOVEN
Vakantiecursus wiskunde, zie ook pagina 25
Organisatie Platform Wiskunde Nederland

vr/za 29/08 30/08 — EINDHOVEN
Vakantiecursus wiskunde, zie ook pagina 25
Organisatie Platform Wiskunde Nederland

vr 12/09 — EINDHOVEN
Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

do 18/09 — EINDHOVEN
Jaarvergadering en studiemiddag
Organisatie NVORWO

vr 7/11 — EINDHOVEN
Prijsuitreiking Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

za 08/11 — VEENENDAAL
Jaarvergadering/Studiedag, zie ook pagina 36
Organisatie NVvW

vr 21/11 — ZWOLLE
Bartjens Rekendictee
Organisatie NWO

2015

19-29/01 — LANDELIJK
Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
Organisatie NWO

vr/za 30/01 31/01 — NOORDWIJKERHOUT
Nationale Wiskundedagen
Organisatie Freudenthal Instituut

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvvw.nl/euclricht.html

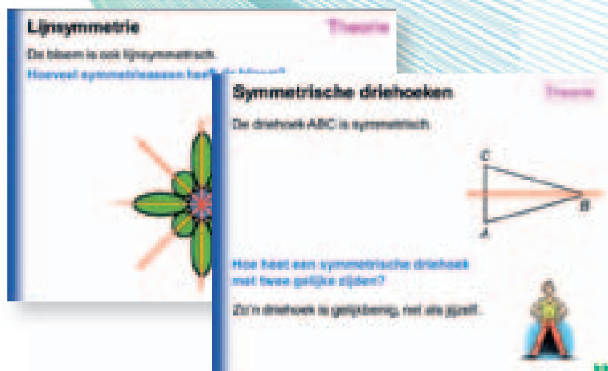
JAARGANG 90

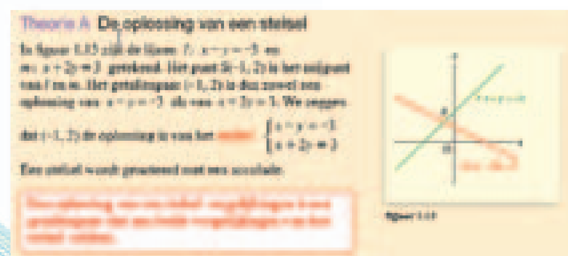
nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
1	9 september 2014	30 juni 2014
2	4 november 2014	8 september 2014
3	16 december 2014	27 oktober 2014
4	5 februari 2015	4 december 2014
5	24 maart 2015	19 januari 2015
6	13 mei 2015	16 maart 2015
7	30 juni 2015	18 mei 2015

GETAL&
RUIMTE

Getal & Ruimte 10e editie past bij u en uw leerling!

Mét RTTI-toetsen en geschikt voor tablet!





De 10e editie vmbo onderbouw:

- Perfect afgestemd op de nieuwe tussendoelen en de tussentoets;
- Ruim aanbod aan actuele praktijkvoorbeelden;
- Het pittigere vmbo-t/havo boek biedt naadloze aansluiting op de 10e editie voor havo/vwo;
- Voor vmbo-bk zijn er veel ppt's toegevoegd.

De 10e editie havo/vwo onderbouw:

- Perfect afgestemd op de nieuwe tussendoelen en de tussentoets;
- Extra differentiatie mogelijkheden;
- Sluit aan op de nieuwe 11e editie voor de Tweede Fase, waarmee uw leerlingen kunnen starten in augustus 2015!

Meer informatie over de 10e editie onderbouw en de nieuwe 11e editie voor de Tweede Fase vindt u op www.getalenruimte.noordhoff.nl.

